**XXIII Межрегиональная олимпиада**

**школьников по математике**

**«САММАТ-2015»**

**Заключительный тур**

**10 класс**

▷ **1.** С помощью любых математических действий и минимального количества цифр 3 представьте число 2015.

▷ **2.** По крайней мере три из заданных вершин параллелограмма находятся внутри некоторого круга. С помощью линейки найдите его центр.

▷ **3.** Сколько различных восьмизначных чисел может получиться при перестановке цифр числа 20142015?

▷ **4.** Сколько правильных положительных несократимых рациональных дробей со знаменателем 2015 удовлетворяет неравенству

$$\frac{(x^2+1)^2}{x(x+1)^2} \leq \frac{625}{112} \quad ?$$

▷ **5.** Дискриминанты трех квадратных трехчленов $ax^2+bx+c$, $bx^2+cx+a$, $cx^2+ax+b$ ($a$, $b$ и $c$ — целые числа, отличные от нуля) одинаковы и являются кубом некоторого натурального числа $N$. Найдите наименьшее значение $N$.

▷ **6.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+2y^2+z^2+2x+2=2y(x+z)+2z \\ (x-2014)^3+(y-2015)^3+(z-2016)^3=5184 \end{cases}$$

▷ **7.** Каждая из 13 прямых разбивает правильный шестиугольник на два пятиугольника, площади которых относятся как 3:4. Докажите, что по крайней мере три из этих 13 прямых проходят через одну точку.

▷ **8.** На доске написаны числа $2, 3, 4, \ldots, 2015$. Разрешается стереть любые два числа, записав вместо них модуль разности их квадратов. Может ли на доске в результате таких операций оказаться один ноль?

▷ **9.** Треугольник имеет целые длины сторон $x$, $y$, $z$, причем известно, что длина одной из его высот равна сумме длин двух других высот. Докажите, что $x^2+y^2+z^2$ — квадрат целого числа.

▷ **10.** Натуральные числа $n$ и $k$ таковы, что число $n^n$ содержит $k$ цифр, а число $k^k$ содержит $n$ цифр. Найдите $n$ и $k$.