

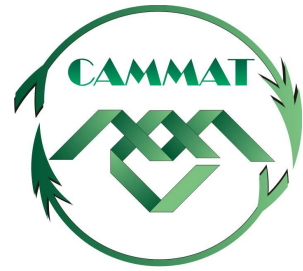
XXIII Межрегиональная олимпиада

школьников по математике

«САММАТ-2015»

Заключительный тур

10 класс



▷ 1. С помощью любых математических действий и минимального количества цифр 3 представьте число 2015.

▷ 2. По крайней мере три из заданных вершин параллелограмма находятся внутри некоторого круга. С помощью линейки найдите его центр.

▷ 3. Сколько различных восьмизначных чисел может получиться при перестановке цифр числа 20142015?

▷ 4. Сколько правильных положительных несократимых рациональных дробей со знаменателем 2015 удовлетворяет неравенству

$$\frac{(x^2 + 1)^2}{x(x + 1)^2} \leq \frac{625}{112} \quad ?$$

▷ 5. Дискриминанты трех квадратных трехчленов  $ax^2 + bx + c$ ,  $bx^2 + cx + a$ ,  $cx^2 + ax + b$  ( $a$ ,  $b$  и  $c$  — целые числа, отличные от нуля) одинаковы и являются кубом некоторого натурального числа  $N$ . Найдите наименьшее значение  $N$ .

▷ 6. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 + z^2 + 2x + 2 = 2y(x + z) + 2z \\ (x - 2014)^3 + (y - 2015)^3 + (z - 2016)^3 = 5184 \end{cases}$$

▷ 7. Каждая из 13 прямых разбивает правильный шестиугольник на два пятиугольника, площади которых относятся как 3:4. Докажите, что по крайней мере три из этих 13 прямых проходят через одну точку.

▷ 8. На доске написаны числа  $2, 3, 4, \dots, 2015$ . Разрешается стереть любые два числа, записав вместо них модуль разности их квадратов. Может ли на доске в результате таких операций оказаться один ноль?

▷ 9. Треугольник имеет целые длины сторон  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , причем известно, что длина одной из его высот равна сумме длин двух других высот. Докажите, что  $x^2 + y^2 + z^2$  — квадрат целого числа.

▷ 10. Натуральные числа  $n$  и  $k$  таковы, что число  $n^n$  содержит  $k$  цифр, а число  $k^k$  содержит  $n$  цифр. Найдите  $n$  и  $k$ .