XXIII Межрегиональная олимпиада

школьников по математике

«САММАТ-2015»

Заключительный тур

9 класс

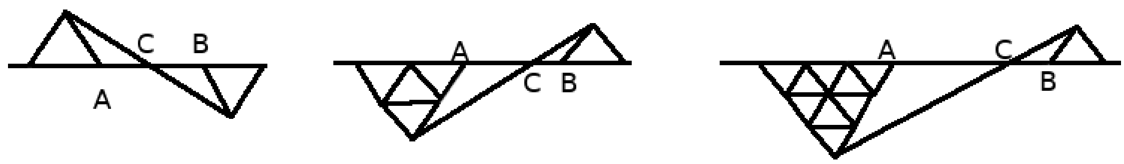
▷ **1.** С помощью любых математических действий и минимального количества цифр 5 представьте число 2015.

Ответ: 8 пятерок(10 баллов); 9 пятерок(8 баллов)

▷ **2.** Разделить данный отрезок а) на два равных отрезка; б) на три равных отрезка; в) на 2015 равных отрезков, пользуясь односторонней линейкой и шаблоном, имеющим форму равностороннего треугольника (шаблон можно обводить по его границе).

Ответ:

а) 6 баллов   б) 8 баллов   10 баллов



▷ **3.** Может ли дискриминант квадратного трехчлена с натуральными коэффициентами $ax^2 + bx + c$ быть равным 1)2013; 2)2014; 3)2015; 4)2016?

Ответ:

1) да: $a = c = 7, \; = 47$

2) нет

3) нет

4) да: $a = c = 5, b = 46$ (10 баллов)

▷ **4.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 + z^2 + 2x + 2 = 2y(x+z) + 2z \\ (x-2014)^2 + (y-2015)^2 + (z-2016)^2 = 2028 \end{cases}$$

Ответ: (2040,2041,2042);(1988,1989,1990) (10 баллов)

▷ **5.** Доказать, что если y есть среднее арифметическое чисел x и z, то значение выражения $x^4 + 2x^3z - 2xz^3 - z^4 - 4x^2y^2 + 4y^2z^2$ равно нулю.

Ответ: 0 (10 баллов)

▷ **6.** Может ли сумма N последовательных натуральных чисел быть точным квадратом, если а) $N = 2012$; б) $N = 2015$?

Ответ: а) да; б) нет (10 баллов)

▷ **7.** На какую наибольшую степень тройки делится произведение $3 \cdot 33 \cdot \cdot 333 \cdot \ldots \cdot 3333333333$? (В последнем множителе 10 троек.)

Ответ: на 14 степень (10 баллов)

▷ **8.** По кругу висят 250 лампочек. Вначале все лампочки включены. Разрешается либо переключить (из включенного состояния в выключенное или наоборот) любые 4 последовательные лампочки, либо взять 5 последовательных лампочек и переключить все, кроме средней. Можно ли с помощью таких операций выключить все лампочки?

Ответ: нет(10 баллов)

$\triangleright$ **9.** В круг радиуса 3 произвольным образом помещены несколько кругов, сумма радиусов которых равна 25. Доказать, что найдется прямая, которая пересекает не менее девяти из этих кругов.

Ответ: Спроектируем все круги на произвольный диаметр AB большого круга. Сумма длин проекций равна сумме диаметров кругов(50). $50 > 8 \cdot AB = 8 \cdot 6 = 48 \Rightarrow \exists$ на AB точка, принадлежащая проекциям по крайней мере девяти кругов. Прямая, проходящая через эту точку и $\perp AB$ - искомая прямая (10 баллов)

$\triangleright$ **10.** Какое наибольшее число фигур, имеющих форму четверти круга радиуса 1 см, можно разместить без наложения прямогольнике размером 2,15 см $\times$ 4 см?

Ответ: 10 (10 баллов)