XXIII Межрегиональная олимпиада

школьников по математике

«САММАТ-2015»

Заключительный тур

8 класс

▷ **1.** Докажите, что при любом $n > 1$ число $2^{2^n} + 2^{2^{n-1}} + 1$ — составное.

Ответ:

$$2^{2^{n-1}=x^2}, x = 2^{2^{n-2}}, x^4 + x^2 + 1 = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$$

(10 баллов)

▷ **2.** Придумайте наибольшее (и наименьшее) число, делящееся на 11, в записи которого используются все десять цифр по одному разу.

Ответ: 9875634120, 1024375869 (10 баллов)

▷ **3.** В двух противоположных углах коробки размером 30см×30см×10см сидят муха и паук. Паук может двигаться к мухе кратчайшим путем двумя способами: по двум боковым граням или сначала по боковой, потом по верхней грани. Какой из этих путей короче?

Ответ: второй (10 баллов)

▷ **4.** На доске написаны все натуральные числа от 1 до 2015 — часть чисел красным мелом, часть — синим. Наибольшее синее число равно количеству синих чисел, наименьшее красное число в семь раз меньше количества красных чисел. Сколько красных чисел написано на доске?

Ответ: 1764 (10 баллов)

▷ **5.** У короля было 4 сына и 864 млн. фартингов. Король поделил все свои миллионы между сыновьями. Сыновья его поехали в разные страны. Первый в пути 6 млн. потерял, второй 6 млн. заработал, у третьего миллионов в два раза больше стало, а у четвертого в два раза меньше. Через три года оказалось, что у всех миллионов осталось поровну. Сколько?

Ответ: 192 млн фартингов (10 баллов)

▷ **6.** На какую наибольшую степень тройки делится произведение $3 \cdot 33 \cdot \cdot 333 \cdot \ldots \cdot 3333333333$? (В последнем множителе 10 троек.)

Ответ: 14 степень (10 баллов)

▷ **7.** Найдите произведение $O \cdot X \cdot A$, если известно, что $XAXAXA + XOXOXO$ делится на 2015.

Ответ: 378 (10 баллов)

▷ **8.** В шахматном турнире участвовало 20 школьников. Каждый сыграл с каждым по одной партии. После окончания турнира оказалось, что ровно один ученик набрал 9,5 очков и он занял девятнадцатое место. Мог ли победитель турнира обойти игрока, занявшего второе место, на 1 очко?

Ответ: не мог (10 баллов)

▷ **9.** Четыре коммерческих банка вкладывают деньги в предприятие. Если бы только первый банк удвоил сумму своего вклада, то всего в предприятия банками окажутся вложенными 11 млн. рублей, если это сделает только второй банк — 12 млн., если только третий — 13 млн., а если только четвертый — 14 млн. рублей. Сколько денег вложил в предприятие каждый банк?

Ответ: 1,2,3,4 млн руб. (10 баллов)

▷ **10.** На клетчатой бумаге отметили 5 точек, расположенных в узлах клеток. Доказать, что хотя бы один из отрезков, соединяющих эти точки, проходит через узел клетки.

Ответ: Принцип Дирихле. Введҷм на клетчатой бумаге систему координат с началом координат в одном из узлов, осями, направленными вдоль линий сетки, и единичным отрезком, равным стороне клетки. Тогда все отмеченные точки будут иметь целочисленные координаты. Покажем, что найдутся две точки из пяти, у которых одна и та же чҷтность координат x и координат y. "Зайцами"у нас будут точки, а "клетками пары (Ч, Ч), (Ч, Н), (Н, Ч), (Н, Н). Если, например, у точки (x, y) координата x чҷтна, а координата y нечҷтна, то мы еҷ поместим в "клетку"(Ч, Н). Итак, 5 "зайцев"и 4 "клетки". Пусть $(x_1, y_1)(x_2, y_2)$ - две точки, попавшие в одну "клетку". Середина отрезка, соединяющего эти две точки, имеет координаты $([(x_1 + x_2)/2], [(y_1 + y_2)/2])$, которые являются целыми числами в силу одинаковой чҷтности x_1 и x_2, y_1 и y_2. Таким образом, середина этого отрезка лежит в узле сетки, т.е. данный отрезок является искомым.(10 баллов)