

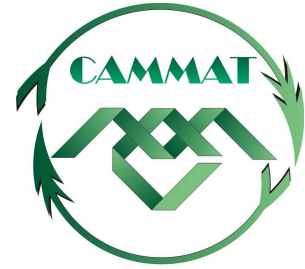
XXIII Межрегиональная олимпиада

школьников по математике

«САММАТ-2015»

Заключительный тур

7 класс



▷ 1. Докажите, что уравнение $2x^2 = y^2 + z^2$ имеет более 2015 решений в целых числах, если y отлично от z .

Ответ: (5;7;1) Ч решение. Т.к. Для $\forall n(5n; 7n; n)$ Ч точное решение, то утверждение доказано (10 баллов)

▷ 2. У Змея Горыныча 2015 голов. Богатырь может срубить одним ударом 33, 21, 19 или 1 голову, но при этом соответственно вырастают 48, 0, 16, 349 голов. Сможет ли богатырь победить Змея Горыныча?

Ответ: нет, не сможет (10 баллов)

▷ 3. На столе лежит 200 спичек. Играют два семиклассника, ходят по очереди. Ход состоит в том, что разрешается взять со стола не более семи спичек, но и не менее одной. Выигрывает тот, кто возьмет последнюю спичку. Кто выиграет при правильной игре? (А если спичек 199?)

Ответ: второй (10 баллов)

▷ 4. На доске написаны все натуральные числа от 1 до 2015 — часть чисел красным мелом, часть — синим. Наибольшее синее число равно количеству синих чисел, наименьшее красное число — в два раза меньше количества красных чисел. Сколько красных чисел написано на доске?

Ответ: 1344 (10 баллов)

▷ 5. У Попа больше земли, чем у Балды, на 90 квадратных аршинов. Каждый год Поп и Балда одновременно обмениваются землей: Поп отдает Балде треть своего надела, и Балда отдает Попу треть своего. У кого из них будет больше земли через 5 лет и на сколько?

Ответ: Больше земли будет у попа, на $\frac{10}{27}$ (10 баллов)

▷ 6. Может ли каждый студент факультета прикладной математики иметь на факультете ровно 13 друзей, если всего студентов 2015?

Ответ: нет (10 баллов)

▷ 7. Первоклассник Вова знает только цифру 5. Докажите, что он может написать число, делящееся на 2015.

Ответ: $\underbrace{55\dots5}_n = a_n : 5 ; a_n : 403$

$$a_1, a_2, \dots, a_{404} = \underbrace{55\dots5}_{404}$$

∃ два a_i и a_j

$$a_i = N_1 \cdot 403 + r_1, 0 \leq r_1 \leq 402$$

$$a_j = N_2 \cdot 403 + r_2, 0 \leq r_2 \leq 402$$

∃ такие a_i и a_j , что $r_1 = r_2$, тогда

$$a_i - a_j = \underbrace{55\dots5}_i - \underbrace{55\dots5}_j = \underbrace{55\dots5}_{i-j} \underbrace{00\dots0}_j = \underbrace{55\dots5}_{i-j} \cdot 10^j = a_{i-j} \cdot 10^j$$

$$a_{i-j}:5$$

$$a_{i-j}:403$$

$$a_{i-j}:2015$$

(10 баллов)

▷ **8.** Буратино, спасаясь от преследования Дуремара, пробежал уже $\frac{1}{5}$ км. Если ему удастся пробежать 40% этого, то до укрытия под мостом останется всего $\frac{3}{7}$ того, что он пробежал. Сколько осталось пробежать Буратино?

Ответ: еще 200 м (10 баллов)

▷ **9.** В семье 4 человека. Если Маше удвоят стипендию, то общий доход всей семьи возрастет на 5%, если вместо этого маме удвоят зарплату — то на 15%, если же зарплату удвоят папе — то на 25%. На сколько процентов возрастет доход всей семьи, если дедушке удвоят пенсию?

Ответ: на 55% (10 баллов)

▷ **10.** Последовательность чисел строится по следующему закону. На первом месте стоит число 7, далее за каждым числом стоит сумма цифр его квадрата, увеличенная на единицу. Например, на втором месте стоит число 14, так как $7^2 = 49$, а $4 + 9 + 1 = 14$. На третьем месте стоит число 17 и так далее. Какое число стоит на 2014-м месте?

Ответ: 11 (10 баллов)