XXIII Межрегиональная олимпиада

школьников по математике

«САММАТ-2015»

Заключительный тур

11 класс

▷ **1.** Первоклассник Вова знает только цифру 5. Докажите, что он может написать число, делящееся на 2015. Если возможно, укажите наименьшее такое число.

Ответ: $\underbrace{55...5}_{30}$(10 баллов)

▷ **2.** С помощью любых математических действий и минимального количества единиц представьте число 2015.

Ответ: $(1+1)^{11} - 11(1+1+1)$ (10 баллов)

▷ **3.** Пусть $f(x)$ и $g(x)$ таковы, что $f(x+g(y)) = 20x + y + 15$. Сколько существует натуральных пар (x, y), таких, что $g(x+f(y)) + g(y+f(x)) \leq 10$?

Ответ: 28 (10 баллов)

▷ **4.** По крайней мере три из заданных четырех точек, являющихся серединами сторон некоторого четырехугольника, находятся внутри некоторого круга. С помощью линейки найдите его центр.

Ответ: Очевидно, что середины сторон будут образовывать параллелограмм. Проведем прямые через две соседние вершины параллелограмма. Эти прямые будут параллельны и пересекут окружность в 4 точках. Эти четыре точки образуют либо прямоуглньик либо равнобедренную трапецию. Для прямоугольника центр находится как пересечение диагоналей. Для трапеции находим точку пересечения диагоналей и точку пересечения боковых сторон. Прямая, соединяющая две эти точки содержит в себе диаметр окружности. Аналогично строим второй диаметр относительно другой пары точек. Точка пересечения диаметров и есть центр окружности. (10 баллов)

▷ **5.** Заданы две последовательности $a_{n+1} = \frac{2a_n}{1+a_n^2}, a_0 = \frac{1}{2}$; и $b_{n+1} = b_n^2 - 2b_n + 2, b_0 = 4$. Доказать,что для всех натуральных n справедливо соотношение

$$a_n b_n = 2b_0 b_1 b_2 \dots b_{n-1}.$$

Ответ:

$$a_n = \frac{3^{2^4} - 1}{3^{2^4} + 1}, b_n = 3^{2^4} - 1$$

(10 баллов)

▷ **6.** Сколько существует различных несократимых дробей a со знаменателем 2015, при которых уравнение имеет решение

$$arcsin^3 x + arccos^3 x = \pi^3 a$$

Ответ: 1218 (10 баллов)

▷ **7.** Каждая из 33 прямых разбивает правильный восьмиугольник на два шестиугольника, площади которых относятся как 3:4. Докажите, что по крайней мере пять из этих прямых проходят через одну точку.

Ответ: Доказательство сводится к получению следующего утверждения: прямая тогда и только тогда разбивает 8-угольник на 2 шестиугольника, площади которых находятся в заданном соотношении, когда она проходит через 1 из 8 определенных точек, принадлежащих этому шестиугольнику, далее применяется принцип Дирихле (10 баллов)

$\triangleright$ **8.** В коробке лежит 2015 спичек. За ход разрешается взять из коробки не более половины имеющихся в ней спичек. Из двух игроков проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто и как выигрывает при правильной игре?

Ответ: Первый выигрывает(10 баллов)

$\triangleright$ **9.** От каждой вершины единичного куба отпиливают на расстоянии h от каждой вершины, перпендикулярно диагонали куба, проходящей через эту вершину, треугольные пирамиды, так, что в полученный многогранник можно вписать шар. Какие значения может принимать объем этого многогранника?

Ответ: $(0;\frac{1}{6}]\bigcup\{\frac{5}{2}(2-\sqrt{3})\}$ (10 баллов)

$\triangleright$ **10.** Пусть $S=x_1+x_2+\ldots+x_{2015}$. Найдите разность между наибольшим и наименьшим значением S, если известно, что выполнены соотношения

$$\begin{cases} x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+\ldots+2x_{2014}^2+x_{2015}^2+2x_1+2014\le \\ \le 2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+\ldots+x_{2014}x_{2015})+2x_{2015}, \\ (x_1-1)^4+(x_2-2)^4+(x_3-3)^4+\ldots+(x_{2015}-2015)^4=32240. \end{cases}$$

Ответ: 8060