XXIII Межрегиональная олимпиада

школьников по математике

«САММАТ-2015»

Заключительный тур

10 класс

▷ **1.** С помощью любых математических действий и минимального количества цифр 3 представьте число 2015.

Ответ: 8 троек (10 баллов)

▷ **2.** По крайней мере три из заданных вершин параллелограмма находятся внутри некоторого круга. С помощью линейки найдите его центр.

Ответ: Проведем прямые через две соседние вершины параллелограмма. Эти прямые будут параллельны и пересекут окружность в 4 точках. Эти четыре точки образуют либо прямоуглньник либо равнобедренную трапецию. Для прямоугольника центр находится как пересечение диагоналей. Для трапеции находим точку пересечения диагоналей и точку пересечения боковых сторон. Прямая, соединяющая две эти точки содержит в себе диаметр окружности. Аналогично строим второй диаметр относительно другой пары точек. Точка пересечения диаметров и есть центр окружности. (10 баллов)

▷ **3.** Сколько различных восьмизначных чисел может получиться при перестановке цифр числа 20142015?

Ответ: 3780 (10 баллов)

▷ **4.** Сколько правильных положительных несократимых рациональных дробей со знаменателем 2015 удовлетворяет неравенству

$$\frac{(x^2+1)^2}{x(x+1)^2} \leq \frac{625}{112} \quad ?$$

Ответ: 1236 (10 баллов)

▷ **5.** Дискриминанты трех квадратных трехчленов ax^2+bx+c, bx^2+cx+a, cx^2+ax+b (a, b и c — целые числа, отличные от нуля) одинаковы и являются кубом некоторого натурального числа N. Найдите наименьшее значение N.

Ответ: 21 (10 баллов)

▷ **6.** Решить систему уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2+2y^2+z^2+2x+2=2y(x+z)+2z \\ (x-2014)^3+(y-2015)^3+(z-2016)^3=5184 \end{array} \right.$$

Ответ: (2026; 2027; 2028) (10 баллов)

▷ **7.** Каждая из 13 прямых разбивает правильный шестиугольник на два пятиугольника, площади которых относятся как 3:4. Докажите, что по крайней мере три из этих 13 прямых проходят через одну точку.

Ответ: Доказательство сводится к получению следующего утверждения: прямая тогда и только тогда разбивает 6-угольник на 2 пятиугольника, площади которых находятся в заданном соотношении, когда она проходит через 1 из 6 определенных точек, принадлежащих этому шестиугольнику, далее применяется принцип Дирихле (10 баллов)

▷ **8.** На доске написаны числа $2, 3, 4, \ldots, 2015$. Разрешается стереть любые два числа, записав вместо них модуль разности их квадратов. Может ли на доске в результате таких операций оказаться один ноль?

Ответ: нет (10 баллов)

▷ **9.** Треугольник имеет целые длины сторон x, y, z, причем известно, что длина одной из его высот равна сумме длин двух других высот. Докажите, что $x^2 + y^2 + z^2$ — квадрат целого числа.

Ответ:

$$\frac{2S}{x} + \frac{2S}{y} = \frac{2S}{z}$$

$$xz + yz = xy$$

$$(x + y - z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy - xz - yz) = x^2 + y^2 + z^2$$

что и требовалось доказать (10 баллов)

▷ **10.** Натуральные числа n и k таковы, что число n^n содержит k цифр, а число k^k содержит n цифр. Найдите n и k.

Ответ: n=k=1; n=k=8; n=k=9 (10 баллов)