

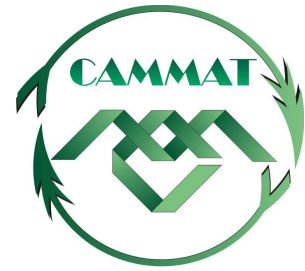
XXIII Межрегиональная олимпиада

школьников по математике

«САММАТ-2015»

Заключительный тур

10 класс



▷ 1. С помощью любых математических действий и минимального количества цифр 3 представьте число 2015.

**Ответ:** 8 троек (10 баллов)

▷ 2. По крайней мере три из заданных вершин параллелограмма находятся внутри некоторого круга. С помощью линейки найдите его центр.

**Ответ:** Проведем прямые через две соседние вершины параллелограмма. Эти прямые будут параллельны и пересекут окружность в 4 точках. Эти четыре точки образуют либо прямоугольник либо равнобедренную трапецию. Для прямоугольника центр находится как пересечение диагоналей. Для трапеции находим точку пересечения диагоналей и точку пересечения боковых сторон. Прямая, соединяющая две эти точки содержит в себе диаметр окружности. Аналогично строим второй диаметр относительно другой пары точек. Точка пересечения диаметров и есть центр окружности. (10 баллов)

▷ 3. Сколько различных восьмизначных чисел может получиться при перестановке цифр числа 20142015?

**Ответ:** 3780 (10 баллов)

▷ 4. Сколько правильных положительных несократимых рациональных дробей со знаменателем 2015 удовлетворяют неравенству

$$\frac{(x^2 + 1)^2}{x(x + 1)^2} \leq \frac{625}{112} \quad ?$$

**Ответ:** 1236 (10 баллов)

▷ 5. Дискриминанты трех квадратных трехчленов  $ax^2 + bx + c$ ,  $bx^2 + cx + a$ ,  $cx^2 + ax + b$  ( $a$ ,  $b$  и  $c$  — целые числа, отличные от нуля) одинаковы и являются кубом некоторого натурального числа  $N$ . Найдите наименьшее значение  $N$ .

**Ответ:** 21 (10 баллов)

▷ 6. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 + z^2 + 2x + 2 = 2y(x + z) + 2z \\ (x - 2014)^3 + (y - 2015)^3 + (z - 2016)^3 = 5184 \end{cases}$$

**Ответ:** (2026; 2027; 2028) (10 баллов)

▷ 7. Каждая из 13 прямых разбивает правильный шестиугольник на два пятиугольника, площади которых относятся как 3:4. Докажите, что по крайней мере три из этих 13 прямых проходят через одну точку.

**Ответ:** Доказательство сводится к получению следующего утверждения: прямая тогда и только тогда разбивает 6-угольник на 2 пятиугольника, площади которых находятся в заданном соотношении, когда она проходит через 1 из 6 определенных точек, принадлежащих этому шестиугольнику, далее применяется принцип Дирихле (10 баллов)

▷ 8. На доске написаны числа  $2, 3, 4, \dots, 2015$ . Разрешается стереть любые два числа, записав вместо них модуль разности их квадратов. Может ли на доске в результате таких операций оказаться один ноль?

**Ответ:** нет (10 баллов)

▷ **9.** Треугольник имеет целые длины сторон  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , причем известно, что длина одной из его высот равна сумме длин двух других высот. Докажите, что  $x^2 + y^2 + z^2$  — квадрат целого числа.

**Ответ:**

$$\frac{2S}{x} + \frac{2S}{y} = \frac{2S}{z}$$

$$xz + yz = xy$$

$$(x + y - z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy - xz - yz) = x^2 + y^2 + z^2$$

что и требовалось доказать (10 баллов)

▷ **10.** Натуральные числа  $n$  и  $k$  таковы, что число  $n^n$  содержит  $k$  цифр, а число  $k^k$  содержит  $n$  цифр. Найдите  $n$  и  $k$ .

**Ответ:**  $n=k=1$ ;  $n=k=8$ ;  $n=k=9$  (10 баллов)