XXI Межрегиональная олимпиада

школьников по математике

«САММАТ-2013»

Заключительный тур

9 класс

▷ **1.** Сколько решений имеет уравнение

$$C^A + M^A = P^A,$$

если A, M, P, C — различные цифры.

▷ **2.** Разрежьте квадрат на 2013 равнобедренных трапеций.

▷ **3.** Пусть a, b, c положительные действительные числа. Найдите наименьшее значение суммы

$$\frac{a+3c}{a+2b+c} + \frac{4b}{a+b+2c} - \frac{8c}{a+b+3c}.$$

▷ **4.** Радиус вписанной в треугольник окружности, стороны которого натураль-ные числа, равен 1. Чему равен наибольший угол этого треугольника?

▷ **5.** Можно ли расставить 14 подряд идущих натуральных чисел в вершинах и серединах сторон правильного семиугольника так, чтобы сумма трех чисел, стоящих в концах и середине каждой стороны, была бы для всех сторон одинаковой?

▷ **6.** Известно, что $\forall x \in R$ $f(x+2) + af(x) = f(x+1)$ и $f(3) = 2013$. Чему равно $f(2013)$, если $a = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

▷ **7.** Действительные числа a, b, c, d таковы, что

$$\begin{cases} a+b+c+d = 2 \\ a^2+b^2+c^2+d^2 = 4 \end{cases}$$

Какие наибольшее и наименьшее значения может принимать d?

▷ **8.** Докажите, что для любого натурального k существует единственная последовательность, состоящая из $(2k-1)$ члена, такая, что сумма квадратов первых k последовательных натуральных чисел равна сумме квадратов $(k-1)$ последних натуральных чисел.

▷ **9.** Одному из нескольких мальчиков разных возрастов 10 лет, что составляет $\frac{1}{5}$ возрастов всех мальчиков (включая и его). Сколько лет сейчас каждому мальчику, если старшему из них 13 лет и возрасты всех мальчиков, кроме десятилетнего, размещенные в возрастающем порядке, составляют арифмети-ческую прогрессию?

▷ **10.** Найти все натуральные n при которых сумма

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \ldots + n(n+1)(n+2) < 20013.$$

ЖЕЛАЕМ УСПЕХА!!!