

# XXI Межрегиональная олимпиада

## школьников по математике

### «САММАТ-2013»



### Заключительный тур

#### 8 класс

▷ 1. Докажите, что уравнение

$$C^A + M^A = P^A,$$

где  $C, M, A, P$  различные четные натуральные числа, имеет бесконечно много решений.

▷ 2. Натуральное число  $n$  назовем разбиваемым, если числа  $1, 2, 3, \dots, n$  можно разбить на такие группы, что наименьшее число в каждой группе равно количеству чисел в этой группе. Докажите, что число 2013 разбиваемо.

▷ 3. Треугольник имеет целые длины сторон  $x, y, z$ , причем известно, что длина одной из его высот равна сумме длин двух других его высот. Докажите, что  $x^2 + y^2 + z^2$  — квадрат целого числа.

▷ 4. На доске выписаны 100 последовательных натуральных чисел. Когда ученик Петров стер два из них, то сумма оставшихся оказалась равной восьми-значному числу 20122013. Найдите

а) первое число из указанной последовательности;

б) Сколько существует таких пар чисел, которые можно убрать согласно условию задачи?

▷ 5. Внутри квадрата, но не в центре находятся 2 точки. Разрежьте квадрат на наименьшее число прямоугольников и переместите их так, чтобы обе точки оказались в центре квадрата.

▷ 6. Ни одно из 98 натуральных чисел не делится на 100 и все эти числа дают при делении на 100 разные остатки. Сумма этих чисел делится на 100. Найдите все указанные остатки от деления.

▷ 7. На экскурсии были семиклассники и восьмиклассники. Все они были либо с фотоаппаратами, либо с видеокамерами. Мальчиков было 16, а ребят с фотоаппаратами 24. Девочек с видеокамерами было ровно столько, сколько мальчиков с фотоаппаратами. Сколько учащихся было на экскурсии?

▷ 8. Какое наименьшее значения может принимать  $c$ , если

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 1. \end{cases}$$

▷ 9. Известно, что площадь правильного треугольника со стороной  $a$  равна  $\frac{a^3}{4R}$ , где  $R$  — радиус описанной окружности. Пусть площадь некоторого треугольника равна  $\frac{x^3}{4R}$ , где  $R$  — радиус описанной окружности,  $x$  — длина одной из его сторон. Следует ли отсюда, что этот треугольник правильный?

▷ 10. Сколько решений в целых числах имеет решение

$$20x^2 + 13y^2 = 2013?$$

**ЖЕЛАЕМ УСПЕХА!!!**