XXI Межрегиональная олимпиада

школьников по математике

«САММАТ-2013»

Заключительный тур

11 класс

▷ **1.** В первом туре олимпиады «САММАТ» 2013 школьников прошли во второй тур (т.е. решили не менее пяти задач из десяти). Докажите, что среди них всегда найдутся по крайней мере четверо школьников, которые решили одни и те же задачи.

▷ **2.** Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_{2012}$ удовлетворяют равенству

$$(1-x_1)^2+(x_1-x_2)^2+\ldots+(x_{2011}-x_{2012})^2+x_{2012}^2=\frac{1}{2013}.$$

Чему равно $x_1 - x_{2012}$?

▷ **3.** Два одинаковых куба с ребром a имеют общую диагональ, но один повернут вокруг этой диагонали на 60° по отношению к другому. Найти объем их общей части.

▷ **4.** При каком наименьшем n выполняется неравенство

$$log_2^n 3 \cdot log_3^n 4 \cdot \ldots \cdot log_{n-1}^n n \cdot log_n^n (n+1) > 2013?$$

▷ **5.** Пусть задана последовательность $a_n : a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1, a_1 = 2$. Вычислить $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_{100}}$ с точностью до 20 знаков после запятой. Какая цифра стоит на 13 месте?

▷ **6.** Для некоторых функций $f(x)$ и $g(x)$ при всех x верно

$$\begin{cases} f(x) = g(x+1)g(x-1), \\ g(x) = f(x+1)f(x-1), \end{cases}$$

причем $f(3) + g(9) = 2013$. Чему равно $f(2013) + g(2013)$?

▷ **7.** Дан $\triangle ABC$, площадь которого равна 2013. На сторонах AB и AC взяты точки D и E соответственно. На отрезке DE взята точка F. Найти чему равно выражение $\sqrt[3]{S_{BDF}}+\sqrt[3]{S_{CEF}}$, если точки D, E, F выбраны так, что $\frac{AD}{AB} = \frac{EC}{AC} = \frac{EF}{DE}$.

▷ **8.** Решите уравнение

$$\left[x^2\right] + \frac{1}{\left[x^2\right]} = \{x\} + \frac{1}{\{x\}},$$

где $[x]$ — целая часть числа x, $\{x\}$ — дробная часть числа x.

▷ **9.** Ни одно из $2n$ натуральных чисел не делится на $(2n+2)$ и все эти числа дают при делении на $(2n+2)$ разные остатки. Сумма этих чисел делится на $(2n+2)$. Найдите все указанные остатки от деления.

▷ **10.** Сколько решений уравнения

$$cos\frac{\pi}{1+\sqrt{x}} + cos\frac{\pi}{1+2x} = 0$$

находится в $[-2013; 2013]$.

ЖЕЛАЕМ УСПЕХА!!!