



XX Межрегиональная олимпиада

школьников по математике

«САММАТ-2012»

Заключительный тур

10 класс

▷ 1. В коробке находятся 13 красных и 17 белых шаров. Разрешается проводить в любом порядке и любом количестве следующие операции:

- 1) увеличить на 2 число красных шаров и одновременно уменьшить на 1 число белых;
- 2) увеличить на 1 число красных шаров и одновременно увеличить на 2 число белых;
- 3) уменьшить на 2 число красных шаров и одновременно увеличить на 1 число белых;
- 4) уменьшить на 1 число красных шаров и одновременно уменьшить на 2 число белых.

Можно ли, совершая такие действия, добиться, чтобы в ящике было 1993 красных шара и 2012 белых шара?

▷ 2. Ученик нарисовал треугольник с углами α , β , γ , другой ученик нарисовал треугольник с углами $\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$, $\frac{\beta\gamma}{\beta+\gamma}$, $\frac{\alpha\gamma}{\alpha+\gamma}$ градусов. Найдите α , β , γ .

▷ 3. Диагональ AC квадрата $ABCD$ совпадает с гипотенузой прямоугольного треугольника ACK , причем точки B и K лежат по одну сторону от прямой AC . Докажите, что $BK = \frac{|AK - CK|}{\sqrt{2}}$ и $DK = \frac{AK + CK}{\sqrt{2}}$.

▷ 4. Может ли среднее арифметическое 25 различных целых чисел равняться: а) 25,24; б) 25,25.

▷ 5. Решите уравнение $\sqrt[3]{x^2 \sqrt[3]{x^2 \sqrt[3]{x^2 \dots}}} = 2012$.

▷ 6. Угол при вершине равнобедренного треугольника равен 108° . Доказать, что высота треугольника, проведенная к основанию, составляет половину биссектрисы угла при основании.

▷ 7. Число, кратное 35, в системе счисления с двузначным основанием записано в виде 1234. Найдите это число.

▷ 8. Найти наибольшее значение выражения $\frac{x}{5+y^3} + \frac{y}{5+x^3}$ при $0 \leq x, y \leq 1$.

▷ 9. Дана произвольная трапеция. С помощью циркуля и линейки найдите координаты центра тяжести данной трапеции.

▷ 10. Жук ползет вверх по поверхности, вертикальное сечение, которой имеет форму параболы $y = \frac{1}{2}x^2$. За единицу времени жук поднимается на 8 см. Потом он отдыхает столько же времени и вследствие скольжения за время отдыха опускается на расстояние, численно равное крутизне (тангенсу угла наклона) параболы в момент начала отдыха. Определите координаты жука в конце девятой единицы времени от начала движения.

ЖЕЛАЕМ УСПЕХА!!!