XX Межрегиональная олимпиада
школьников по математике
«САММАТ-2012»
9 класс

1. В железнодорожной будке на расстоянии 1 м от окна, ширина которого 1 м, сидит обходчик. На расстоянии 299 м от окна и параллельно плоскости окна проходит железнодорожный путь. Обходчик видит целиком поезд длиной 100 м, идущий по этому пути с постоянной скоростью в течение 10 сек. Определить скорость поезда. (Шириной поезда и расстоянием между глазами обходчика можно пренебречь.)

Решение. Пусть S - точка, в которой находится обходчик, AB - окно, CD - видимый участок железнодорожного пути и $SE \perp CD$. По условию $SF = 1$, $AB = 1$, $FE = 299$, тогда $SE = 300$ и подобия треугольников ABS и CDS получим $CD = 300$. Пусть поезд движется от C к D, обходчик видит поезд целиком с момента, когда конец последнего вагона попал в точку C, до момента, когда начало первого вагона попало в точку D. Следовательно, поезд прошел $300 - 100 = 200$ м за 10 сек, поэтому его скорость равна 20 м/сек. (72 км/ч.)

Ответ: 72 км/ч.

2. Имеются два равновеликих, не являющихся квадратами прямоугольника, у которых стороны измеряются целыми числами. У первого прямоугольника ширина равна 2011, а длина равна полупериметру второго прямоугольника. Найдите ширину (меньшую сторону) второго прямоугольника.

Ответ: 2012.

3. Последовательность a_n задана соотношением $a_{n+1} = \frac{1}{1-a_n}$. Найдите a_{2012}, если $a_1 = 3 + \sqrt{7}$.

Решение. Из условия следует, что $a_2 = \frac{1}{1-(3+\sqrt{7})} = \frac{2-\sqrt{7}}{3}$,

$a_3 = \frac{1}{1-\frac{2-\sqrt{7}}{3}} = \frac{\sqrt{7}-1}{2}$,

$a_4 = \frac{1}{1-\frac{\sqrt{7}-1}{2}} = 3 + \sqrt{7} = a_1$.

Тогда $a_{n+3} = a_n$ при любом $n \in N$. Следовательно, $a_{2012} = a_2 = \dfrac{2-\sqrt{7}}{3}$.

4. Дворянинов С.В. Ученик нарисовал треугольник с углами x, y, z, другой ученик нарисовал треугольник с углами $sqrtxy$, $\sqrt{yz}$, $\sqrt{zx}$ градусов. Найдите x, y, z.

Решение. По условию задачи $x + y + z = \pi$, $sqrtxy + \sqrt{yz} + \sqrt{zx} = \pi$. Получаем, что $x + y + z - sqrtxy - \sqrt{yz} - \sqrt{zx} = 0$.

Последнее уравнение равносильно уравнению

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 + (\sqrt{y} - \sqrt{z})^2 + (\sqrt{z} - \sqrt{x})^2 = 0.$$

Получаем, что $x = y = z = \frac{\pi}{3}$.

Ответ: $x = y = z = \frac{\pi}{3}$.

5. Дан произвольный треугольник. Построить с помощью циркуля и линейки квадрат равновеликий данному треугольнику.

Решение. 1 способ. $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \Rightarrow x = \sqrt{S}$, $x = \sqrt{\sqrt{p(p-c)}\sqrt{(p-b)(p-c)}}$.

$m = \sqrt{p(p-c)}$, $n = \sqrt{(p-b)(p-c)}$ – среднее геометрическое. Строится среднее геометрическое.

2 способ. С помощью циркуля и линейки строится высота треугольника (описать). Тогда площадь треугольника $S = \frac{1}{2}bh$ и $x = \sqrt{\frac{1}{2}bh}$– среднее геометрическое величин $\frac{b}{2}$, h.

6. В классе присутствуют учитель и несколько учеников. Найти число учеников, если известно, что возраст учителя на 24 года больше среднего возраста учеников и на 20 лет больше среднего возраста всех присутствующих в классе.

Решение. Пусть n - число учеников, s - их средний возраст. Тогда $s + 24$ - возраст учителя, $ns + s + 24$ - сумма возрастов присутствующих в классе. Отсюда

$$\frac{ns + s + 24}{n+1} = s + \frac{24}{n+1}$$

- средний возраст всех присутствующих в классе, с другой стороны, равен $s + 24 - 20 = s + 4$. Равенство $s + \frac{24}{n+1} = s + 4$ дает нам $n = 5$. Следовательно, в классе присутствуют 5 учеников.

Ответ: 5.

7. 2012 чисел: $x_1, x_2, ..., x_{2012}$ записаны в строчку. Известно, что сумма любых трех соседних из них равна 200. Причем первое число 19, а последнее - 98. Найтиде остальные 2009 чисел.

Решение. Для любого n выполнено $x_n + x_{n+1} + x_{n+2} = x_{n+1} + x_{n+2} + x_{n+3}$. Отсюда следует, что $x_n = x_{n+3}$, и, аналогично, $x_{n+1} = x_{x+4}$, $x_{n+2} = x_{n+5}$, т.е.идет периодическое повторение первых трех чисел x_1, x_2, x_3. Тогда $x_{3k+1} = x_1 = 19$, $x_{3k+2} = x_{2012} = 98$ $(k = 0, 1, ..., 670)$ и $x_{3k} = 200 - 19 - 98 = 83$ $(k = 1, 2, ..., 670)$.

8. Найти наибольшее значение величины $\frac{x}{3+y^2} + \frac{y}{3+x^2}$ при $0 \le x, y \le 1$.

Решение. Т.к. $0 \le x, y \le 1$, то $\frac{x}{3+y^2} \le \frac{x}{2+x^2+y^2}$, $\frac{y}{3+x^2} \le \frac{y}{2+x^2+y^2}$, следовательно, $\frac{x}{3+y^2} + \frac{y}{3+x^2} \le \frac{x+y}{2+x^2+y^2}$.

Докажем, что $\frac{x+y}{2+x^2+y^2} \le \frac{1}{2}$.

Это следует из того, что

$$2(x+y) \le 2 + x^2 + y^2 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 \ge 0,$$

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 \ge 0, \forall x, y.$$

Ответ: $\frac{1}{2}$ при $x = y = 1$.

9. Площадь треугольника ABC равна $15\sqrt{3}$. Угол $BAC = 120^0$. Угол ABC больше угла ACB. Расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, равно 2. Найдите медиану треугольника ABC, проведенную из вершины B.

Решение. Пусть O - центр окружности, K, M, N - точки касания со сторонами AC, BC, AB. Тогда $OK = r = AO * \sin 60^0 = \sqrt{3}$, $AK = AN = 1$. Если p-полупериметр треугольника ABC, то $S_{ABC} = pr$. Отсюда находим, что $p = 15$.

Обозначим $BM = BN = x$, $CM = CK = y$. Тогда

$$\begin{cases} x + y + 1 = 15, \\ (x+y)^2 = (x+1)^2 + (y+1)^2 + (x+1)(y+1). \end{cases}$$

Решив полученную систему получаем: $x = 9, y = 5$ или $x = 5, y = 9$.

Используя условие, что Угол ABC больше угла ACB получаем, что решение $x = 9, y = 5$ не удовлетворяет условию задачи.

Тогда воспользовавшись теоремой косинусов, получаем, что медиана проведенная из вершины B равна: 11.

Ответ: 11.

10. Зная, что $\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \frac{m}{n}$, найти $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}$.

Решение. Положим $a + b = x$, $b + c = y$, $c + a = z$. Тогда $\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \frac{(z-y)(x-z)(y-x)}{xyz}$, а так как при этом $a = \frac{1}{2}(x - y + z)$, $b = \frac{1}{2}(y - z + x)$, $c = \frac{1}{2}(z - x + y)$, то

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} = \frac{x-y+z}{2x} + \frac{y-z+x}{2y} + \frac{z-x+y}{2z} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{y-z}{2x} + \frac{1}{2} - \frac{z-x}{2y} + \frac{1}{2} - \frac{x-y}{2z} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{y-z}{x} + \frac{z-x}{y} + \frac{x-y}{z}\right) =$$

$$\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{(y-z)yz + (z-x)zx + (x-y)xy}{xyz} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{(z-y)(x-z)(y-x)}{xyz} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{n} = \frac{3n-m}{2n}.$$

Ответ: $\frac{3n-m}{2n}$.