XX Межрегиональная олимпиада школьников по математике «САММАТ-2012»

8 класс

1. Купец, будучи должен 753 руб., попросил у того же заимодавца еще 303 руб. Последний согласился удовлетворить его просьбу на условии, чтобы весь долг был уплачен в течение 8 месяцев и притом так, чтобы должник, внеся к концу первого месяца некоторую сумму на покрытие части долга, ежемесячно увеличивал свой взнос на половину, т.е. уплатил бы во второй месяц полторы суммы таких суммы, в третий месяц две таких же суммы, в четвертый две с половиной и т.д. Обсудив эти условия, купец согласился на них. Спрашивается, какую сумму должен он внести в первый месяц и сколько в каждый из следующих месяцев.

Решение. Пусть к концу первого месяца купец должен внести x руб. Тогда

$$\left(1+1\frac{1}{2}+2+2\frac{1}{2}+3+3\frac{1}{2}+4+4\frac{1}{2}\right)x=753+303;$$

$$x=48.$$

Ответ: 48; 72; 96; 120; 144; 168; 192; 216.

2. Имеется 199 литров молока в бутылках по 0,5, 0,7 и 1 литру. Доказать, что можно взять 50 литров молока, не вскрывая бутылок.

Доказательство. Если в бутылках по 0,5 л и 1 л имеется не менее 50 л молока, то справедливость утверждения очевидна.

Допустим теперь, что полулитровыми и литровыми бутылками набрать 50 л нельзя. Тогда в бутылках по 0,7 л находится больше 149 л молока, беря только такие бутылки, получить 50 л нельзя (50:0,7 - нецелое), но 49 л можно (70 бутылок). А поскольку 198,5 л или все 199 л не могут размещаться в бутылках по 0,7 л, то обязательно найдутся бутылки другой емкости. одна или две из которых дадут недостающий 1 литр.

Следовательно, в любом случае можно взять 50 л молока, не вскрывая бутылки.

3. Построить квадрат, равновеликий данному прямоугольнику.

Указание. Пусть a, b — стороны прямоугольника, тогда сторона квадрата $x = sqrta\cdot b$, т.е. необходимо построить среднее геометрическое.

4. Три тюльпана и девять гвоздик стоят меньше 220 рублей, а семь тюльпанов и пять гвоздик - больше 24о рублей. Что дороже: 41 тюльпан или 53 гвоздики?

Решение. Пусть x стоимость тюльпана, y - гвоздики (в рублях). Тогда по условию $\begin{cases} 3x+9y<220, \\ 7x+5y>240, \end{cases}$

Умножим обе части первого неравенства на 12, второго - на 11: $\begin{cases} 36x+108y<2640, \\ 22x+11y>2640, \end{cases}$ отсюда $77x+55y>36x+108y$, или $41x>53y$.

Ответ: 41 тюльпан дороже 53 гвоздик.

5. Школьный звонок был сломан. Он начинал звенеть каждый раз, когда на электронных часах появлялась цифра 2, и звенел до тех пор, пока какая-нибудь двойка была на циферблате часов. Сколько всего времени в течение суток звенел школьный звонок? (Электронные часы показывают время от 00:00 до 23:59.)

Указание. Во первых звонок звенел, когда в числе, обозначающем часы, была цифра два. Возможные варианты: 02, 12, 20, 21, 22, 23 часов, всего - 6 часов.

Во-вторых, он звенел, когда число часов не содержало цифры 2, а таких часов 18, и минут было 02, 12, с 20 до 29, 32, 42, 52. Всего - 270 мин=4 часа 30 минут.

Ответ: 10 часов 30 минут.

6. Двое по очереди ломают шоколадку фабрики «Россия» размером $m\times n$. За один ход разрешается сделать прямолинейный разлом любого из кусков вдоль углубления (но только одного). Проигрывает тот, кто не может сделать очередного хода. Кто выигрывает?

Решение. Решим задачу в общем случае, взяв шоколадку $m\times n$. После каждого хода количество кусков увеличивается на 1. Сначала был один кусок. В конце игры, когда нельзя сделать ходы, шоколадка разломана на маленькие дольки, число кусков равно mn. Значит, игра будет продолжаться $mn-1$ ход. Поэтому, если $mn-1$ нечетно, а значит, mn - четно, то выигрывает первый игрок, так как он делает последний ход. Если $mn-1$ - четно, а значит, mn - нечетно, то выигрывает второй игрок.

Ответ: если mn - четно, то выигрывает первый игрок, если mn - нечетно, то выигрывает второй игрок.

7. Вычислить:

$$\sqrt{1+2012^2+\frac{2012^2}{2013^2}}+\frac{2012}{2013}.$$

Решение. Воспользуемся формулой $\sqrt{a^2+\frac{1}{b^2}+\frac{a^2}{(ab+1)^2}}=|a+\frac{1}{b}-\frac{a}{ab+1}|$.

$$\sqrt{1+2012^2+\frac{2012^2}{2013^2}}+\frac{2012}{2013}=\sqrt{\frac{1}{1^2}+2012^2+\frac{2012^2}{(2012\cdot 1+1)^2}}+\frac{2012}{2013}=$$

$$|2012+1-\frac{2012}{2013}|+\frac{2012}{2013}=2013.$$

Ответ: 2013.

8. Найти все пятизначные числа $\overline{abcde}$, делящиеся на 36 и такие, что $a<b<c<d<e$.

Решение. Так как $36=4\cdot 9$, то каждое искомое число делится на 4 и на 9. По признаку делимости на 4 двузначное число $\overline{de}$ кратно 4, а ввиду очевидных неравенств $4\le d<e\le 8$ оно может быть равно только 48, 56 или 68. Разберем эти три случая.

Если $\overline{de}=48$, то $\overline{abc}=123$, а число 12348 удовлетворяет условиям задачи.

Если $\overline{de}=56$, то по признаку делимости на 9 и с учетом неравенств $a<b<c\le 4$ имеем $\overline{abcde}=12456$, а число 12456 удовлетворяет условиям задачи.

Наконец, равенство $\overline{de}=68$ для искомого числа $\overline{abcde}$ выполняться не может, так как соотношения $18<1+2+3+6+8\le a+b+c+d+e\le 3+4+5+6+8<27$ показывают, что сумма $a+b+c+d+e$ не может быть кратна 9.

Ответ: 12348, 12456.

9. Турист выехал из турбазы на байдарке против течения в 10 часов 15 минут с обязательством вернуться обратно не позднее 13 часов того же дня. Известно, что скорость течения 1,4 км/ч, скорость байдарки в стоячей воде 3 км/ч. На какое максимальное расстояние турист может отплыть от турбазы, если через каждые 30 мин гребли он 15 мин отдыхает, не причаливая к берегу, и может повернуть назад только после отдыха.

Решение. За один цикл "гребля - отдых"по течению турист проплывает 2,55 км, а против течения - 0,45 км, и тратит на этот цикл 0,75 ч.

Пусть до поворота назад турист совершает n циклов, тогда на обратный путь ему понадобится $\frac{0,45n}{4,4}$ ч, и для того чтобы он не опоздал, должно выполняться неравенство

$$0,75n+\frac{0,45n}{4,4}\le 2,75,$$

откуда $n\le 3$. Поэтому наибольшее удаление от турбазы получается перед отдыхом во время третьего цикла и равно $0,9+0,8=1,7$.

Ответ: 1,7 км.

10. Зная, что $\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}=\frac{m}{n}$, найти $\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}$.

Решение. Положим $a+b=x$, $b+c=y$, $c+a=z$. Тогда $\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}=\frac{(z-y)(x-z)(y-x)}{xyz}$, а так как при этом $a=\frac{1}{2}(x-y+z)$, $b=\frac{1}{2}(y-z+x)$, $c=\frac{1}{2}(z-x+y)$, то

$$\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}=\frac{x-y+z}{2x}+\frac{y-z+x}{2y}+\frac{z-x+y}{2z}=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{y-z}{2x}+\frac{1}{2}-\frac{z-x}{2y}+\frac{1}{2}-\frac{x-y}{2z}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{y-z}{x}+\frac{z-x}{y}+\frac{x-y}{z}\right)=$$

$$\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{(y-z)yz+(z-x)zx+(x-y)xy}{xyz}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{(z-y)(x-z)(y-x)}{xyz}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{m}{n}=\frac{3n-m}{2n}.$$

Ответ: $\frac{3n-m}{2n}$.