XX Межрегиональная олимпиада школьников по математике «САММАТ-2012»
10 класс

1. В коробке находятся 13 красных и 17 белых шаров. Разрешается проводить в любом порядке и любом количестве следующие операции:

1) увеличить на 2 число красных шаров и одновременно уменьшить на 1 число белых;

2) увеличить на 1 число красных шаров и одновременно увеличить на 2 число белых;

3) уменьшить на 2 число красных шаров и одновременно увеличить на 1 число белых;

4) уменьшить на 1 число красных шаров и одновременно уменьшить на 2 число белых. Можно ли, совершая такие действия, добиться, чтобы в ящике было 1993 красных шара и 2012 белых шара?

Решение. Каждая из указанных операций представляет собой прибавление положительных и отрицательных чисел к уже имеющимся двум числам. Следовательно, эти операции перестановочны, т.е. если мы изменим порядок их выполнения, на резльтат это не овлияет.

Предположим, что после применения p операций типа 1), q операций типа 2), r операций типа 3), s типа 4) мы получили 1993 красных шара 2012 белых шара. Тогда

$$\begin{cases} 13+2p+q-2r-s=1993, \\ 17-p+2q+r-2s=2012, \end{cases} \begin{cases} 2(p-r)+(q-s)=1980, \\ -(p-r)+2(q-s)=1995, \end{cases} \begin{cases} p-r=399, \\ q-s=\frac{5970}{5}=1194. \end{cases}$$

Ответ: Возможно.

2. Дворянинов С.В. Ученик нарисовал треугольник с углами α, β, γ, другой ученик нарисовал треугольник с углами $\dfrac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$, $\dfrac{\beta\gamma}{\beta+\gamma}$, $\dfrac{\alpha\gamma}{\alpha+\gamma}$ градусов. Найдите α, β, γ.

Решение. По условию задачи $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, $\dfrac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}+\dfrac{\beta\gamma}{\beta+\gamma}+\dfrac{\alpha\gamma}{\alpha+\gamma}=\pi$. Получаем, что

$$\alpha+\beta+\gamma-\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}-\frac{\beta\gamma}{\beta+\gamma}-\frac{\alpha\gamma}{\alpha+\gamma}=0,$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha+\beta}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\beta^2+\gamma^2}{\beta+\gamma}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha^2+\gamma^2}{\alpha+\gamma}\right)=0.$$

Тогда второй не может построить такой треугольник.

3. Диагональ AC квадрата $ABCD$ совпадает с гипотенузой прямоугольного треугольника ACK, причем точки B и K лежат по одну сторону от прямой AC. Докажите, что $BK=\frac{|AK-CK|}{\sqrt{2}}$ и $DK=\frac{AK+CK}{\sqrt{2}}$.

Решение. Пусть $CK<AK$. Обозначим $\angle ACK=\varphi$. Тогда $\varphi<45^0$. Точка K лежит на окружности, описанной около данного квадрата. Если R - радиус этой окружности, то $BK=2Rsin\angle BCK=ACsin(\varphi-45^0)=AC(\frac{\sqrt{2}}{2}sin\varphi-\frac{\sqrt{2}}{2}cos\varphi)=\frac{ACsin\varphi-ACcos\varphi}{\sqrt{2}}=\frac{AK-CK}{\sqrt{2}}$.

$DK=2Rsin\angle KCD=ACsin(45^0+\varphi)=\frac{ACcos\varphi+ACsin\varphi}{\sqrt{2}}=\frac{CK+AK}{\sqrt{2}}$.

4. Может ли среднее арифметическое 25 различных целых чисел равняться: а) 25,24; б) 25,25.

Решение. а) Может.

Пример. $\frac{S}{25}=25\frac{24}{100}=\frac{631}{25}$. $S=631$.

$1,2,3,...,24,331$. $S=\frac{1+24}{2}\cdot 24+331=25\cdot 12+331=631$. $S=\frac{631}{25}=25,24$.

б) Не может.

5. Решите уравнение $\sqrt[3]{x^2\sqrt[3]{x^2\sqrt[3]{x^2\ldots}}}=2012$.

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$|x|^{\frac{2}{3}}\cdot|x|^{\frac{2}{3^2}}\cdot|x|^{\frac{2}{3^3}}\cdot ...=2012,\quad |x|^{\frac{2}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{2}{3^3}+\cdots}=2012.$$

Поскольку сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии $\frac{2}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{2}{3^3}+...$ равна 1, то $|x|=2012$.

Ответ: 2012, -2012.

6. Угол при вершине равнобедренного треугольника равен 108^0. Доказать, что высота треугольника, проведенная к основанию, составляет половину биссектрисы угла при основании.

Решение. Пусть $\angle ACB=108$, $BH\perp AB$, $\angle A=\angle B=36$, AK — биссектриса. Введем обозначение $AB=2a$. Рассмотрим $\triangle ACH$, $CH=a\cdot tg36^0$. Рассмотри $\triangle AKB$, $AK=2atg36^0$. Следовательно, $2CH=AK$.

7. Число, кратное 35, в системе счисления с двузначным основанием записано в виде 1234. Найдите это число.

Решение. Пусть основанием системы счисления служит число $10x+y$. Тогда будем иметь: $(10x+y)^3+2(10x+y)^2+3(10x+y)+4=35N$, где N – частное от деления искомого числа на 35. Отсюда вытекает, что число y^3+2y^2+3y+4 должно делиться на 5. Непосредственной подстановкой убеждаемся, что это возможно только при $y=1$ и $y=6$.

Пусть $y = 1$, тогда $1000x^3 + 500x^2 + 100x + 10 = 35N$ или $200x^3 + 100x^2 + 20x + 2 = 7N$. Перепишем это равенство так:

$$7(28x^3 + 14x^2 + 3x) + (4x^3 + 2x^2 - x + 2) = 7N.$$

Число $4x^3 + 2x^2 - x + 2$ делится на 7 только при $x = 1$ и $x = 8$.

Подобным образом убеждаемся, что при $y = 6$ значением x может быть только число 4.

Итак, условию задачи удовлетворяют числа:

$$11^3 + 2 \cdot 11^2 + 3 \cdot 11 + 4 = 1610;$$

$$46^3 + 2 \cdot 46^2 + 3 \cdot 46 + 4 = 101710;$$

$$81^3 + 2 \cdot 81^2 + 3 \cdot 81 + 4 = 544810.$$

Ответ: 1610; 101710; 544810.

8. Найти наибольшее значение выражения $\dfrac{x}{5+y^3} + \dfrac{y}{5+x^3}$ при $0 \le x, y \le 1$.

Решение. Воспользуемся фактом, что при $0 \le x, y \le 1$. $x^3 - 3x + 2 \ge 0$, тогда $x^3 - 3x + 2 + y^3 - 3y + 2 \ge 0$, $3(x+y) \le 4 + x^3 + y^3$.

Значит $\dfrac{x}{5+y^3} + \dfrac{y}{5+x^3} \le \dfrac{x}{4+x^3+y^3} + \dfrac{y}{4+x^3+y^3} = \dfrac{x+y}{4+x^3+y^3} \le \frac{1}{3}$.

Ответ: $\frac{1}{3}$.

9. Дана произвольная трапеция. С помощью циркуля и линейки найдите координаты центра тяжести данной трапеции.

Решение. Рассмотрим произвольную трапецию $ABCD$. Проведем диагональ BD. Известно, что центр тяжести треугольника лежит в точке пересечения его медиан. Следовательно, необходимо построить точки F, E - точки пересечения медиан треугольников ABD и BSD соответственно. Соединяя точки F и E отрезком и находя его середину, находим центр тяжести произволной трапеции.

10. Жук ползет вверх по поверхности, вертикальное сечение, которой имеет форму параболы $y = \frac{1}{2}x^2$. За единицу времени жук поднимается на 8 см. Потом он отдыхает столько же времени и вследствие скольжения за время отдыха опускается на расстояние, численно равное крутизне (тангенсу угла наклона) параболы в момент начала отдыха. Определите координаты жука в конце девятой единицы времени от начала движения.

Решение. К концу 1-ой единицы времени $H = y = 8$, $tg\alpha = y' = x$. из уравнения $y = \frac{1}{2}x^2$ имеем: $x = \sqrt{2y}$. Значит, к концу 2-ой единицы времени жук опустится на $\sqrt{16} = 4$. Его высота будет: $8 - 4 = 4$ см. За третью единицу времени он поднимется на 8 см. $H = y = 12$. За 4-ую единицу времени поднимется на $\sqrt{2y} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$. За 5-ю единицу времени поднимется на 8 см до $y = H = (20 - 2\sqrt{6})$ см. За 6-ую единицу опуститься на $\sqrt{2y} = 2\sqrt{10 - \sqrt{6}}$ см. Его высота будет равна: $(20 - 2\sqrt{6} - 2\sqrt{10 - \sqrt{6}})$ см. За 7-ую единицу времени поднимется до высоты $y = H = (28 - 2\sqrt{6} - 2\sqrt{10 - \sqrt{6}})$ см. За 8-ую единицу времени опуститься на $\sqrt{2y} = 2\sqrt{14 - \sqrt{6} - \sqrt{10 - \sqrt{6}}}$ см. Его высота будет: $y = (28 - 2\sqrt{6} - 2\sqrt{10 - \sqrt{6}} - 2\sqrt{14 - \sqrt{6} - \sqrt{10 - \sqrt{6}}})$ см. В конце 9-ой единицы времени $y = (36 - 2\sqrt{6} - 2\sqrt{10 - \sqrt{6}} - 2\sqrt{14 - \sqrt{6} - \sqrt{10 - \sqrt{6}}})$ см, а

$$x = \sqrt{2y} = 2\sqrt{18 - \sqrt{6} - \sqrt{10 - \sqrt{6}} - \sqrt{14 - \sqrt{6} - \sqrt{10 - \sqrt{6}}}}.$$