Материалы заданий

олимпиады школьников по математике «САММАТ - 2010»

11 КЛАСС

▷ **1.** Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение

$$HOK(x;y) = HOK(2009;2010)?$$

▷ **2.** Известно, что $3x + y \geqslant 13$. Докажите, что $4x^2 + y^2 \geqslant 52$.

Решение: Неравенство $13(4x^2 + y^2) \geqslant 4(3x + y)^2$ выполнено для всех x, y. Оно сводится к неравенству $(4x - 3y)^2 \geqslant 0$. Отсюда

$$4x^2 + y^2 \geqslant \frac{4}{13}(3x + y)^2 \geqslant \frac{4}{13} \cdot 13^2 = 52.$$

▷ **3.** Можно ли в единичном квадрате разместить без пересечений восемь правильных треугольников со стороной $\frac{4}{9}$?

▷ **4.** Решить систему

$$\begin{cases} [x+y] - \{y+z\} = 20,09, \\ [y+z] - \{z+x\} = 20,(10), \\ [z+x] - \{x+y\} = 20,11 \end{cases}$$

где $[x]$ - целая часть числа x, $\quad x \quad$ - дробная часть числа x.

▷ **5.** Найдите все целые решения неравенства

$$x^{2011} + x^{2009} \geq \sqrt[2010]{2008 - 2007x} + 1.$$

▷ **6.** Расположить на плоскости четыре точки так, чтобы все попарные расстояния между ними принимали только два значения $\sqrt{10}$ и $\sqrt{20}$. Найдите все виды таких расположений.

▷ **7.** На первый курс механико-математического факультета поступило не более 220 студентов, но и не менее 140. Причем половина из них были медалисты. После первой сессии 30 студентов были отчислены за неуспеваемость и число медалистов сократилось на 6%. Сколько студентов начали обучение на первом курсе и сколько медалистов было отпо итогам первой сессии.

▷ **8.** Докажите, что число

$$1403^{2010} - 2010^{1403}$$

составное.

▷ **9.** Дан отрезок длиной $\sqrt[32]{33}$ см. С помощью циркуля и линейки постройте отрезок длиной 31 см.

▷ **10.** Проекция некоторого многогранника на три взаимоперпендикулярные плоскости имеет вид: Рис. 2 (вид спереди, вид справа, вид сверху соответственно). Докажите, что в этот многогранник можно вписать шар и если это возможно найдите радиус этого шара.

Рис. 2