

МАТЕРИАЛЫ ЗАДАНИЙ

ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ «САММАТ - 2010»

10 КЛАСС

▷ **1.** Ежедневно в гипермаркет «Перекресток» поставляется одним видом транспорта 12 т картофеля из трех хозяйств: из первого - по цене 4000 р. за 1 т, из второго - по цене 3000 р. за 1 т, из третьего по 1000 р. Чтобы поставка картофеля в магазин была произведена вовремя, необходимо на погрузку требуемых 12 т затратить 40 мин. Известно, что в первом хозяйстве уровень механизации позволяет погрузку 1 т производить за 1 мин, во втором - за 4 мин, в третьем - за 3 мин. Производственные мощности этих хозяйств выглядят так: первое хозяйство должно ежедневно выделять для поставки в город не менее 10 т, второе - не более 8 т, третье - не более 6 т картофеля. Как распределить заказы на поставки 12 т между хозяйствами, чтобы общая стоимость привозимого в город картофеля была минимальной.

▷ **2.** Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x + [y] + \{z\} = 1,1, \\ \{x\} + y + [z] = 2,2, \\ [x] + \{y\} + z = 3,3. \end{cases}$$

Здесь $[x]$ и x — соответственно целая и дробная части x .

▷ **3.** Натуральные числа α и β таковы, что

$$\frac{43}{197} < \frac{\alpha}{\beta} < \frac{17}{77}.$$

Найдите наименьшее возможное значение β .

▷ **4.** Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение

$$\text{НОК}(x; y) = \text{НОК}(1993; 2010)?$$

▷ **5.** Шестизначное число A делится на 13, а число, полученное вычеркиванием его последней цифры, делится на 17. Найти наименьшее число A , удовлетворяющее этим требованиям.

▷ **6.** Найти все решения неравенства

$$x + y + z \leq \sqrt{x + y - 6} + 2\sqrt{y + z - 5} + 3\sqrt{z + x - 3}.$$

▷ **7.** Найти все значения параметра a , при которых уравнение

$$x^3 - 670x^2 + 2010x + a = 0$$

имеет три различных корня, образующих геометрическую прогрессию.

▷ **8.** Найдите наибольшее значение выражения $x^2 + y^2 + z^2 + w^2$, если x, y, z, w удовлетворяют системе

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x = 4y + 11, \\ z^2 + w^2 + 2w = 2z + 167, \\ xw + zy + w + x \geq 49 + 2z + y. \end{cases}$$

▷ **9.** Докажите, что уравнение $x^3 - y^3 = 2010$ не имеет решений в натуральных числах.

▷ **10.** Два одинаковых куба либо соприкасаются, либо имеют общую часть. По трем проекциям (спереди, слева и сверху) полученной фигуры изобразите ее и найдите её объем. (Рис. 1.)

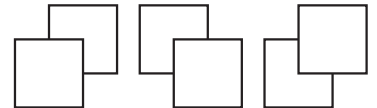


Рис. 1