Материалы заданий с ответами

олимпиады школьников по математике «САММАТ - 2010»

9 КЛАСС

▷ **1.** Шестизначное число A делится на 17, а число, полученное вычеркиванием его последней цифры, делится на 13. Найти наибольшее и наименьшее число A, удовлетворяющее этим требованиям.
Ответ: 999838; 100232.

▷ **2.** Решите уравнение $x^2 - 4x \cdot \cos \pi x^3 + 4 = 0$.
Ответ: 2.

▷ **3.** В треугольнике ABC на сторонах AB, BC, AC соответственно отмечены точки M, N, P так, что четырехугольник $AMNP$ - параллелограмм. Найти площадь треугольника ABC, если площади треугольников MBN и PNC равны S_1 и S_2.
Ответ: $S_{ABC} = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2$

▷ **4.** Решить уравнение $x + y + z = 2\sqrt{x-6} + 4\sqrt{y-5} + 6\sqrt{z-3}$.
Ответ: 7, 9, 12.

▷ **5.** AM — медиана треугольника ABC, а K и L — точки пересечения медианы AM с вписанной в треугольник ABC окружностью, K лежит между A и L. При этом $AK = KL = LM$. Докажите что стороны треугольника ABC соотносятся как $5 : 10 : 13$ (в каком то порядке).

Решение: Обозначим точки касания окружности со сторонами AB, BC и CA через C_1, A_1 и B_1 соответственно. Пусть точка A_1 лежит между B и M (случай, когда точка A_1 лежит между C и M рассматривается аналогично). Пусть $AC_1 = AB_1 = x, BA_1 = BC_1 = y, CB_1 = CA_1 = z, AK = KL = LM = t$. По свойству секущей и касательной $|ML| \cdot |MK| = |MA_1|^2$, откуда $|MA_1|^2 = 2t^2$. Аналогично $|AK| \cdot |AL| = |AB_1|^2$ и $x^2 = |AB_1|^2 = 2t^2$. В итоге $|MA_1| = x$. Так как M — середина BC, то $|BA_1| + |A_1M| = |MC|$, т.е. $y + x = z - x$ и $z = y + 2x$. Итак, $|AB| = x + y, |BC| = y + z = 2x + 2y, |CA| = z + x = 3x + y$. Кроме того $|AM| = 3t$ и $2t^2 = x^2$. Применяя теорему косинусов к треугольникам BMA и CMA, получим равенства ($\cos\angle BMA = d$):

$$|BA|^2 = |MA|^2 + |MB|^2 - 2|MA| \cdot |MB| \cdot d$$

и

$$|CA|^2 = |MA|^2 + |MC|^2 + 2|MA| \cdot |MC| \cdot d,$$

складывая которые получим

$$(y + x)^2 + (y + 3x)^2 = (3t)^2 + (y + x)^2 + (3t)^2 + (y + x)^2,$$

или, используя равенство $2t^2 = x^2$ и деля на x^2,

$$\left(\frac{y}{x} + 3\right)^2 = 9 + \left(\frac{y}{x} + 1\right)^2.$$

Из последнего уравнения легко найти, что

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{4} \text{ или } x = 4y.$$

Окончательно

$$|AB| = 5y,\ |BC| = 10y,\ |CA| = 13y.$$

▷ **6.** Решить систему $\begin{cases} [x] - \{x + y\} = 20,09, \\ [x + y] - \{y\} = 20,11, \end{cases}$ где $[x]$ - целая часть числа x, $\{x\}$ - дробная часть числа x.

Ответ: $x = 21,02; y = 0,89$.

▷ **7.** Все натуральные числа от 1 до 2010 записали в следующем порядке: сперва записали в порядке возрастания все числа, сумма цифр которых равна 1. Затем все числа с суммой цифр 2 (также в порядке возрастания), потом - все числа с суммой 3 (также в порядке возрастания), и т.д. Какое число стоит на 1993 месте.

Ответ: 1969.

▷ **8.** Многочлен $P(x)$ при делении на $x^4 + x^2 + 1$ дает остаток $x^3 + x$. Какой остаток будет получен при делении этого многочлена на $x^2 + x + 1$?

Ответ: $x + 1$.

▷ **9.** Мамаша семейки Симпсон собирается закупить фрукты для своей семейки. Согласно диетическим нормативам, ежедневная порция фруктов на одного члена семьи должна содержать не менее 3 г витамина С и 2 г витамина А. У мамаши имеется возможность закупить апельсины по цене 5 долларов за один килограмм и яблоки по цене 4 доллара за один килограмм. Содержимое витаминов в этих фруктах приведено в таблице.

Витамины	Апельсины	Яблоки
А	2%	1%
С	1%	3%

Сколько граммов апельсинов и яблок должна содержать ежедневная порция одного члена семейки, чтобы удовлетворять диетическим нормативам и при этом стоимость порции была бы наименьшей?

Ответ: 60 г апельсинов, 80 г яблок ежедневная порция одного члена семейки.

▷ **10.** Дан отрезок длиной $a = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$ с помощью циркуля и линейки постройте отрезок длиной 1.

Указания: Рассмотрим $a = \sqrt{2 - \sqrt{3}} = \sqrt{\dfrac{4 - 2\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\dfrac{(\sqrt{3} - 1)^2}{2}} = \dfrac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{2}}$.

$$a \cdot \sqrt{2 + \sqrt{3}} = 1,$$

$$\sqrt{2a^2 + \sqrt{3}a^2} = 1.$$