

11 КЛАСС

▷ 1. Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение

$$НОК(x; y) = НОК(2009; 2010)?$$

Ответ: $3^5 \cdot 5 = 1215$.

▷ 2. Известно, что $3x + y \geq 13$. Докажите, что $4x^2 + y^2 \geq 52$.

Решение: Неравенство $13(4x^2 + y^2) \geq 4(3x + y)^2$ выполнено для всех x, y . Оно сводится к неравенству $(4x - 3y)^2 \geq 0$. Отсюда

$$4x^2 + y^2 \geq \frac{4}{13}(3x + y)^2 \geq \frac{4}{13} \cdot 13^2 = 52.$$

▷ 3. Можно ли в единичном квадрате разместить без пересечений восемь правильных треугольников со стороной $\frac{4}{9}$?

Ответ: Можно.

▷ 4. Решить систему

$$\begin{cases} [x + y] - \{y + z\} = 20,09, \\ [y + z] - \{z + x\} = 20, (10), \\ [z + x] - \{x + y\} = 20,11 \end{cases}$$

где $[x]$ - целая часть числа x , $\{x\}$ - дробная часть числа x .

Ответ: $x = 10, (93); y = 10, (94); z = 10, (95)$.

▷ 5. Найдите все целые решения неравенства

$$x^{2011} + x^{2009} \geq \sqrt[2010]{2008 - 2007x} + 1.$$

Ответ: 1.

▷ 6. Расположить на плоскости четыре точки так, чтобы все попарные расстояния между ними принимали только два значения $\sqrt{10}$ и $\sqrt{20}$. Найдите все виды таких расположений.

Ответ: вершины квадрата.

▷ 7. На первый курс механико-математического факультета поступило не более 220 студентов, но и не менее 140. Причем половина из них были медалисты. После первой сессии 30 студентов были отчислены за неуспеваемость и число медалистов сократилось на 6%. Сколько студентов начали обучение на первом курсе и сколько медалистов было по итогам первой сессии.

Ответ: 200, 6.

▷ 8. Докажите, что число

$$1403^{2010} - 2010^{1403}$$

составное.

Решение: Так как $x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \dots + y^{n-1})$, то, если $x - y$ делится на m , то $x^n - y^n$ делится на m . В силу равенства

$$1403^{2010} - 2010^{1403} = 1403^{2010} - 1 - (2010^{1403} - 1),$$

достаточно показать, что $1403^{2010} - 1$ и $2010^{1403} - 1$ оба делятся на одно и то же простое число p , не совпадающее с исходным числом. Покажем, что в качестве такого p можно взять число 7. Действительно, $2010 - 1 = 2009 = 7 \cdot 287$ и $2010^{1403} - 1^{1403}$ также делится на 7. Далее,

$$\begin{aligned} 1403^{2010} - 1 &= (1403^6)^{335} - 1^{335} = (1403^6 - 1)A = \\ &= (1403^6 - 3^6 + 728)A = ((1403 - 3)B + 7 \cdot 104)A = 7N. \end{aligned}$$

Остается показать, что $1403^{2010} - 2010^{1403}$ больше 7. Так как $1403 > 2^{10}$, а $2010 < 2^{11}$, то

$$1403^{2010} - 2010^{1403} > 2^{20100} - 2^{15433} > 2^{15433} > 7.$$

▷ **9.** Дан отрезок длиной $\sqrt[32]{33}$ см. С помощью циркуля и линейки постройте отрезок длиной 31 см.

Указание: Пусть $x = \sqrt[32]{33}$, тогда можно построить отрезок $4x$, а следовательно и отрезок $\sqrt{17}x = \sqrt{(x)^2 + (4x)^2}$.

$$a = \sqrt{(4x)^2 + (\sqrt{(17)x})^2} = \sqrt{16x^2 + 17x^2} = \sqrt{33}x = 33^{\frac{17}{32}},$$

$$b = \sqrt{(4a)^2 + (\sqrt{(17)a})^2} = \sqrt{16a^2 + 17a^2} = \sqrt{33}a = 33x,$$

$$c = \sqrt{a \cdot x} = 33^{\frac{9}{32}},$$

$$d = \sqrt{x \cdot c} = 33^{\frac{5}{32}},$$

$$e = \sqrt{x \cdot d} = 33^{\frac{3}{32}},$$

$$m = \sqrt{b \cdot d} = 33^{\frac{19}{32}},$$

$$n = \sqrt{a \cdot c} = 33^{\frac{13}{32}},$$

$$f = \sqrt{m \cdot n} = 33^{\frac{1}{2}},$$

$$y = \sqrt{(4f)^2 + (\sqrt{17}f)^2} = 33.$$

Используя теорему Фалеса можно построить отрезок длиной 31.

▷ **10.** Проекция некоторого многогранника на три взаимоперпендикулярные плоскости имеет вид: Рис. 2 (вид спереди, вид справа, вид сверху соответственно). Докажите, что в этот многогранник можно вписать шар и если это возможно найдите радиус этого шара.

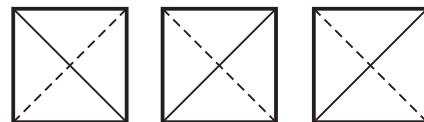


Рис. 2

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{12}}, \frac{\sqrt{3}-1}{2}$.