Материалы заданий с ответами

олимпиады школьников по математике «САММАТ - 2010»

10 КЛАСС

▷ **1.** Ежедневно в гипермаркет «Перекресток» поставляется одним видом транспорта 12 т картофеля из трех хозяйств: из первого - по цене 4000 р. за 1 т, из второго - по цене 3000 р. за 1 т., из третьего по 1000 р. Чтобы поставка картофеля в магазин была произведена вовремя, необходимо на погрузку требуемых 12 т затратить 40 мин. Известно, что в первом хозяйстве уровень механизации позволяет погрузку 1 т производить за 1 мин, во втором - за 4 мин, в третьем - за 3 мин. Производственные мощности этих хозяйств выглядят так: первое хозяйство должно ежедневно выделять дял поставки в город не менее 10 т , второе - не более 8 т, третье - не более 6 т картофеля. Как распределить заказы на поставки 12 т между хозяйствами, чтобы общая стоимость привозимого в город картофеля была минимальной.

Ответ: из первого хозяйства привозить 10 **т, из второго -** 0 **т, из третьего -** 2 **т;** 42 **- стоимость.**

▷ **2.** Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x + [y] + \{z\} = 1{,}1, \\ \{x\} + y + [z] = 2{,}2, \\ [x] + \{y\} + z = 3{,}3. \end{cases}$$

Здесь $[x]$ и $\{x\}$ — соответственно целая и дробная части x.

Ответ: $x = 1$**,** $y = 0{,}2$**,** $z = 2{,}1$**.**

▷ **3.** Натуральные числа α и β таковы, что

$$\frac{43}{197} < \frac{\alpha}{\beta} < \frac{17}{77}.$$

Найдите наименьшее возможное значение β.

Ответ: $\beta = 32$.

▷ **4.** Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение

$$HOK(x; y) = HOK(1993; 2010)?$$

Ответ: 243.

▷ **5.** Шестизначное число A делится на 13, а число, полученное вычеркиванием его последней цифры, делится на 17. Найти наименьшее число A, удовлетворяющее этим требованиям.

Ответ: 100139.

▷ **6.** Найти все решения неравенства

$$x + y + z \le \sqrt{x + y - 6} + 2\sqrt{y + z - 5} + 3\sqrt{z + x - 3}.$$

Ответ: 5, 2, 7.

▷ **7.** Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$x^3 - 670x^2 + 2010x + a = 0$$

имеет три различных корня, образующих геометрическую прогрессию.

Ответ: $a = -27$.

▷ **8.** Найдите наибольшее значение выражения $x^2+y^2+z^2+w^2$, если x, y, z, w удовлетворяют системе

$$\begin{cases} x^2+y^2+2x=4y+11, \\ z^2+w^2+2w=2z+167, \\ xw+zy+w+x \geq 49+2z+y. \end{cases}$$

Ответ: $192+2\sqrt{314}$.

▷ **9.** Докажите, что уравнение $x^3-y^3=2010$ не имеет решений в натуральных числах.

Решение: Преобразуем исходное уравнение к следующему виду:

$$(x-y)((x-y)^2+3xy)=2010.$$

В случае, если $x-y$ не делится на 3, левая часть уравнения также делится на 3, но $2010=3\cdot 670$. Если же $x-y=3k$, то $(x-y)((x-y)^2+3xy)=3k(9k^2+3xy)=9(3k^3+kxy)$, но 2010 не делится на 9.

▷ **10.** Два одинаковых куба либо соприкасаются, либо имеют общую часть. По трем проекциям (спереди, слева и сверху) полученной фигуры изобразите ее и найдите её объем.(Рис. 1.)

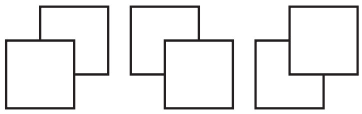

Рис. 1

Ответ: $\dfrac{a^3}{8}$.