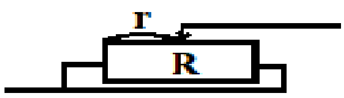
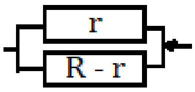
# Решения задач Межрегиональной олимпиады школьников на базе ведомственных образовательных организаций в 2021-2022 учебном году
## 9 класс
## Заключительный этап. Вариант 1.

***Задача 1. (15 баллов).*** Для схемы включения реостата с сопротивлением R нарисовать график зависимости общего сопротивления $R_0$ от сопротивления r левой (по рисунку) части реостата (до движка).




**Решение:** Нарисуем так называемую эквивалентную схему, соответствующую схеме, данную в условии задачи.

Эквивалентная схема (см. рис.) – это схема, составленная из двух параллельно включенных резисторов с указанными сопротивлениями. Их общее (результирующее) сопротивление $R_0$ равно




$$R_0 = R_0(r) = \frac{(R-r)r}{(R-r)+r} = \frac{Rr - r^2}{R}.$$

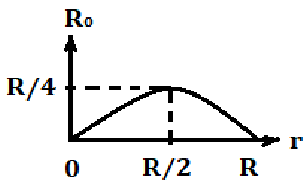
Таким образом, общее (результирующее) сопротивление $R_0$ есть функция переменной r $R_0(r)$. Исследуем эту функцию.

Область определения функции (область изменения переменной r):
$0 \leq r \ \leq R.$

$$R_0(r=0) = R_0(r=R) = 0.$$

Аналитическое выражение функции $R_0(r)$ есть квадратичная парабола (выпуклая вверх), проходящая через начало координат (r=0). Вершина параболы находится в точке r=R/2. Значение функции в этой точке $R_0(r=R/2) =$ = R/4.

Нарисуем требуемый график




Ответ: $\boldsymbol{R_0 = \frac{Rr - r^2}{R}}$.

***Задача 2. (15 баллов).*** В некотором тепловом процессе (в котором участвует идеальный газ) объем газа зависит от температуры по закону $V = \alpha T^2$ ($\alpha$-const). Найти отношение $\eta$ конечного давления к начальному ($\eta = P_к/P_н$) в результате проведенного процесса, если занимаемый газом объем увеличился в k раз.

**Решение:** Запишем уравнение состояния идеального газа.

$$PV = \nu RT.$$

Отсюда получаем:

$$P_{\text{нач.(кон)}} = \frac{\nu R \mathrm{T}_{\text{нач.(кон)}}}{V_{\text{нач.(кон)}}} = \frac{\nu R \sqrt{V_{\text{нач.(кон)}}}}{\sqrt{\alpha} V_{\text{нач.(кон)}}}.$$

Последнее преобразование в последнем выражении получено с учетом условия задачи ($V=\alpha T^2$). Искомая величина $\eta$ с использованием последнего выражения (и с учетом второго условия задачи $V_{к.}/V_{н.}=k$) равна

$$\eta = \frac{\mathrm{P}_{\text{к.}}}{\mathrm{P}_{\text{н.}}} = \sqrt{\frac{V_{\text{нач.}}}{V_{\text{кон.}}}} = \sqrt{1/k} = k^{-1/2}.$$

<u>Ответ:</u> $\boldsymbol{\eta = k^{-1/2}}$.

***Задача 3. (15 баллов).*** Тело бросили вертикально вверх. Через промежуток времени $\Delta t=1$ с скорость тела уменьшилась в k=2 раз. На какую максимальную высоту H поднимется тело?

**Решение:** Скорость тела при движении вверх с начальной скоростью $v_0$ меняется по закону

$$v(t) = v_0 - gt.$$

Через промежуток времени $\Delta t$ скорость тела уменьшиться в раз и станет равной

$$v(\Delta t) = v_0 - g\Delta t = v_0/k.$$

Отсюда найдем начальную скорость $v_0$

$$v_0 = \frac{g\Delta t k}{k-1}.$$

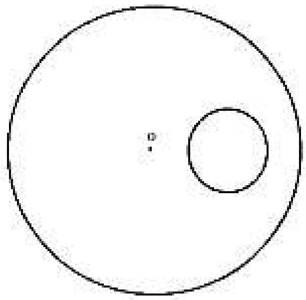
Максимальная высота подъема тела H определяется по хорошо известной формуле

$$H = \frac{v_0^2}{2g}.$$

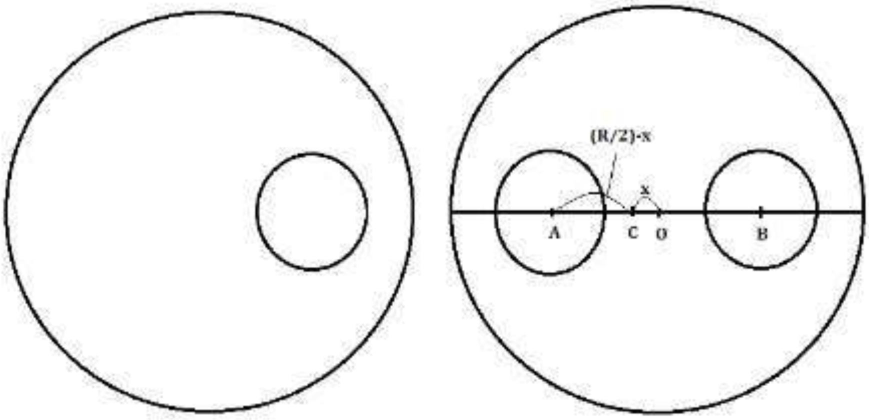
Подставив в последнее выражение $v_0$, получим ответ.

<u>Ответ:</u> $\boldsymbol{H = \frac{g(\Delta t)^2 k^2}{2\,(k-1)^2} = 2g(\Delta t)^2 = 19.8}$м.

***Задача 4. (25 баллов).*** Из однородного диска радиуса R вырезали круглое отверстие радиуса r (r<R/2) как показано на рисунке. Центр вырезанного отверстия находится на расстоянии R/2 от центра диска. Определить положение центра масс полученного изделия относительно центра диска О.



**Решение:** Ниже дадим два рисунка – исходный (с лева) и рабочий (для решения задачи).




На рабочем рисунке вырезанное круглое отверстие радиуса r – отверстие с центром в точке «В». Точка «О» - центр диска. Через центр диска О и центр отверстия В проведем диаметр диска. На построенном диаметре построим окружность радиуса r с центром в точке «А» на расстоянии ОА (ОА=ОВ). После проведенных геометрических построений нашу задачу можно переформулировать: определить положение центра масс системы двух однородных симметричных тел – однородного диска с двумя симметричными отверстиями (с центром масс в точке «О») и однородного диска радиуса r с центром масс в точке «А». Искомый центр масс «С» системы тел находится на построенном диаметре между точками «А» и «О». Расстояния от центра масс С до центра масс диска с двумя симметричными вырезами (X) и центра масс диска радиуса r с центром масс в точке «А» (R/2–x) указаны на рисунке.

Тогда выполняется соотношение центров масс:

$$x\,(M - m^*) = \left(\frac{R}{2} - x\right) m^*,$$

где $m^*$ - масса диска радиуса r, $M - m^*$ - масса большого диска с двумя симметричными вырезами.

Разберемся с массами симметричных тел. Пусть масса исходного изделия (диска с отверстием) равна m. Введем поверхностную плотность масс исходного изделия σ:

$$\sigma = \frac{m}{\pi(R^2 - r^2)}$$

Тогда масса диска радиуса r с центром масс в точке «А» будет равна:

$$m^* = \sigma\,\pi r^2 = \frac{mr^2}{R^2 - r^2}.$$

Масса большого диска с двумя симметричными вырезами равна:

$$M - m^* = m\ \frac{R^2 - 2r^2}{R^2 - r^2}.$$

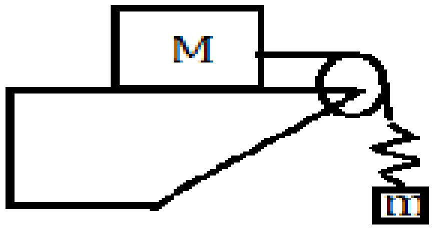
Теперь воспользуемся формулой соотношения центров масс, подставив в неё полученные данные:

$$x\ m\ \frac{R^2 - 2r^2}{R^2 - r^2} = \left(\frac{R}{2} - x\right)\frac{mr^2}{R^2 - r^2}$$

Мы получили уравнение относительно искомой в задаче величины x - центра масс полученного изделия относительно центра диска. Решая его, получим ответ.

Ответ: $\boldsymbol{x = \frac{Rr^2}{2(R^2 - r^2)}}$.

***Задача 5. (30 баллов).*** На горизонтальном столе покоится груз массы M. коэффициент трения груза о стол μ. К грузу привязана невесомая и нерастяжимая нить, переброшенная через невесомый блок. К нити прикреплена невесомая пружина жесткости k. Какой массы m груз надо прикрепить к свободному концу нерастянутой пружины, чтобы, падая, он смог сдвинуть груз массы M с места?




**Решение:** Из-за невесомости блока сила натяжения нити F всегда равна силе упругости пружины $F_{уп.}$ Последняя максимальна при максимальном удлинении ΔL пружины. При этом груз массы m опустится по высоте на расстояние h = ΔL. Запишем закон сохранения полной механической энергии E системы трех тел (обоих грузов и пружины).

$$\Delta \mathrm{E} = \Delta \mathrm{T} + \Delta U_1 + \Delta U_2 = 0.$$

Здесь: $\Delta\mathrm{T} = 0$ −приращение кинетической энергии тел; $\Delta U_1 = -mgh$ − приращение потенциальной энергии груза массы m; $\Delta U_2 = \frac{\mu h^2}{2}$ − приращение потенциальной энергии пружины. С учетом вышесказанного закон сохранения полной механической энергии E системы трех тел будет приведен к виду

$$mgh = \frac{\mu h^2}{2}.$$

Отсюда находится h – максимально необходимое опускание (по высоте) груза массы m (необходимое для такого растяжения пружины, чтобы сдвинуть груз массы M с места)

$$h = \frac{2mg}{\mu}.$$

Чтобы сдвинуть груз массы М с места, необходимо чтобы сила натяжения нити F (равная силе упругости пружины $F_{уп.}$= μh) превзошла <u>максимальную</u> силу трения покоя ($F_{макс.\ тр.\ пок.}$ = $F_{тр.\ скол\ .}$= μMg) груза массы М о стол

$$\mu h > \mu Mg.$$

Подставляя в последнее выражение h, получаем ответ.

<u>Ответ:</u> $\boldsymbol{m > \frac{M\mu}{2}}$.