Решения задач Межрегиональной олимпиады школьников на базе ведомственных образовательных организаций в 2021-2022 учебном году
11 класс
Заключительный этап. Вариант 1.

Задача 1. (20 баллов). Мальчик съехал на санках с горы и въехал на горизонтальную дорогу, покрытую льдом. Коэффициент трения между полозьями санок и льдом μ_1=0.05. Длина полозьев l = 1 м. Потом ледяная поверхность резко закончилась и началась снежная дорога. Коэффициент трения между полозьями санок и снегом μ_2. В тот момент, когда расстояние от правого конца полозьев до начала стыка покрытия составляло l, модуль скорости санок составил v = 2 м/с. При каком максимальном значении коэффициенте трения μ_2 санки полностью въедут на снежную дорогу.

Решение: Модуль работы силы трения на всем перемещении полозьев можно представить в виде суммы трех слагаемых: $A = A_0 + A_1 + A_2$.

Здесь $A_0=\mu_1\cdot m\cdot g\cdot l$ - модуль работы силы трения на перемещении полозий санок по льду до границы со снегом (m – масса саней с мальчиком),

A_1 - модуль работы силы трения, действующей со стороны льда, на перемещении полозьев со льда на снег.

Обозначив через x длину той части полозьев, которая находится на льду, для модуля силы трения, действующей со стороны льда, имеем:

$$F_1 =(\mu_1\cdot x\cdot m\cdot g)/l.$$

Эта сила изменятся в зависимости от x линейно в пределах от μ_1 m g до нуля. Поэтому модуль работы силы F_1 на перемещении l равен:

$$A_1=\mu_1\cdot m\cdot g\cdot l\ /2.$$

Аналогично можно найти модуль работы силы трения F_2, действующей со стороны снега, на том же перемещении:

$$A_2=\mu_2\cdot m\cdot g\cdot l\ /2.$$

По условию, санки остановилась, оказавшись целиком на снегу. Тогда:

$$m\cdot v^2/2=\mu_1\cdot m\cdot g\cdot l+ \mu_1\cdot m\cdot g\cdot l\ /2 + \mu_2\cdot m\cdot g\cdot l\ /2.$$

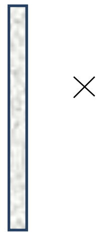
Отсюда находим максимальную величину коэффициента $\mu_2=v^2/(g\cdot l)-3\mu_1$

<u>Ответ:</u> μ_2 =0.25

Задача 2. (20 баллов). Во вселенной существуют нейтронные звезды, у которых масса немногим больше массы Солнца, а диаметр около 20 км. Они состоят в основном из нейтронов. У некоторых из них есть очень сильное магнитное поле с индукцией достигающей 10^{11} Тл. Их называют магнитарами. Когда космический корабль пролетал вблизи магнитара, из-за столкновения с небольшим метеоритом оторвалась защитная крышка иллюминатора. Оцените ускорение, с которым будет падать крышка на звезду после отделения в тот момент, когда расстояние от нее до звезды R = 1000000 км, а индукция

магнитного поля звезды B = 5·10^3 Тл. Масса звезды M = 2,8·10^{30} кг, электрическая постоянная ε_0 = 8,85·10^{-12} Ф·м$^{-1}$, гравитационная постоянная G = 6,67·10^{-11} м^3·с$^{-2}$·кг$^{-1}$. Силовые линии магнитного поля перпендикулярны направлению на центр звезды. Крышка металлическая и плоская V = 1 дм^3 и массу m = 10 кг. (Считайте, что плоскость крышки параллельна силовым линиям поля.)

Решение: Рассмотрим металлический стержень длиной l, движущийся вправо со скоростью v перпендикулярно силовым линиям магнитного поля с индукцией B. На электрон внутри стержня будет действовать сила Лоренца, направленная вниз вдоль стержня. Такая же, но направленная в противоположную сторону, сила будет действовать на положительные ионы металла. Таким образом магнитное поле стремится растащить положительные и отрицательные заряды. Но смещение зарядов вызовет появление электрического поля, удерживающего заряды. Из условия равенства этих сил находим, что напряженность электрического поля $E=vB$, и между концами стержня возникнет разность потенциалов $U=vBl$.



Теперь рассмотрим плоскую пластинку площадью S и толщиной l, которая движется в магнитном поле так, что ее плоскость параллельна силовым линиям (или две пластинки, соединенные стержнем). Между ее поверхностями появится разность потенциалов U. Этой пластинке сопоставим плоский конденсатор с расстоянием между обкладками l.

Заряд конденсатора будет:

$$q = \frac{\varepsilon_o SU}{l} = \frac{\varepsilon_o S}{l} vBl.$$

Если пластинка будет двигаться с ускорением a, то заряд будет изменяться:

$$\frac{\Delta q}{\Delta t} = I = \varepsilon_o SB\frac{\Delta v}{\Delta t} = \varepsilon_o SBa.$$

На проводник с током будет действовать сила Ампера $F = IBl$. Следовательно, на пластинку, движущуюся с ускорением, будет действовать сила:

$$F = \varepsilon_o SB^2 la,$$

направленная против вектора ускорения

Сила гравитации, действующая на пластинку (защитный экран), равна

$$G\frac{Mm}{R^2} = mg,$$

где g– ускорение свободного падения в поле тяжести звезды.

Запишем закон Ньютона для пластинки, падающей в магнитном поле:

$$ma = G\frac{Mm}{R^2} - \varepsilon_o SB^2 la.$$

Отсюда $a = \frac{GM}{R^2(1+\varepsilon_0 SB^2 lm^{-1})}$.

<u>Ответ:</u> $a = \frac{GM}{R^2(1+\varepsilon_0 SB^2 lm^{-1})}$.

Задача 3. (20 баллов). В теплоизолированный сосуд, закрытый теплоизолированным поршнем, помещена смесь водяного пара и воды при температуре T кельвинов (масса воды много меньше массы пара). Поршень сместили, в результате объем системы уменьшился, температура пара возросла на ΔT, причем $\Delta T \ll T$, а часть воды испарилась. Найти отношение массы испарившейся воды к массе пара в исходном состоянии. Удельная теплота испарения при температуре T равна λ Дж/кг, пар можно считать идеальным газом с молярной теплоемкостью при постоянном объеме равной C_V Дж/(моль·К). Теплоемкостью воды пренебречь. Также известно, что малые относительные изменения температуры $\Delta T/T$ связаны с относительными изменениями давления насыщенного пара $\Delta p/p$ соотношением $\Delta p/p = k\Delta T/T$, где k – положительная константа. Молярная масса воды μ кг/моль.

Решение: Давление p, объем V, температура T, масса m насыщенного водяного пара связаны уравнением Менделеева-Клапейрона:

$$pV = \frac{m}{\mu} RT \,. \tag{1}$$

При условии малых изменений параметров пара из уравнения (1) получим:

$$p\Delta V + \Delta p \cdot V = \frac{\Delta m}{\mu} RT + \frac{m}{\mu} R\Delta T \,. \tag{2}$$

При адиабатическом сжатии работа внешних сил, равная $-p\Delta V$, затрачивается на приращение внутренней энергии пара $(m + \Delta m)C_V\Delta T/\mu \approx mC_V\Delta T/\mu$ и на испарение воды массой Δm (энергозатраты составляют $\lambda\Delta m$):

$$-p\Delta V = \frac{m}{\mu} C_V \Delta T + \lambda \Delta m \,. \tag{3}$$

По условию задачи:

$$\frac{\Delta p}{p} = k\frac{\Delta T}{T} \,. \tag{4}$$

Решив систему уравнений (1) – (4), получим ответ:

$$\eta = \frac{\Delta m}{m} = \frac{(k-1)R - C_V}{\mu\lambda + RT}\Delta T = \frac{(k-4)R}{\mu\lambda + RT}\Delta T..$$

<u>Ответ:</u> $\eta = \frac{\Delta m}{m} = \frac{(k-1)R - C_V}{\mu\lambda + RT}\Delta T = \frac{(k-4)R}{\mu\lambda + RT}\Delta T \approx 0{,}0024$, где Δm – масса испарившейся воды, m – масса пара в исходном состоянии.

Задача 4. (20 баллов). В океанологии при исследовании солевых и температурных стратификаций Мирового океана используется понятие «частоты плавучести» - частоты колебаний элемента жидкости, смещенного по вертикали из положения равновесия. Найти «частоту плавучести» N маленького шарика, находящегося в слое жидкости с линейно возрастающей с увеличением глубины плотностью. Толщина слоя L, разность плотностей на его границах $\Delta\rho$. Шарик находится в равновесии на глубине, где плотность жидкости равна ρ.

Решение: На шарик объёмом V и плотностью $\rho_ш$ действует сила тяжести $F_т=\rho_ш Vg$ и сила Архимеда $F_т=\rho Vg$, направленные противоположно друг другу. Из условия равновесия шарика делаем вывод, что $\rho_ш=\rho$. Направим ось X вверх, ноль на оси совместим с равновесным положением шарика. Сместим шарик из положения равновесия на величину Δx, тогда плотность жидкости в этой точке будет равна

$$\rho(\Delta x) = \rho - \frac{\Delta\rho}{L}\Delta x \qquad (1)$$

а проекция на ось X результирующей силы, действующей на шарик будет равна

$$F_x = F_A - F_T = -\rho \mathrm{Vg} + (\rho - \frac{\Delta\rho}{L}\Delta x)\mathrm{Vg} = -\frac{\Delta\rho}{L}\mathrm{Vg}\Delta x \qquad (2)$$

Таким образом, при смещении шарика из положения равновесия возникает возвращающая сила, пропорциональная смещению и противоположно ему направленная. Сопоставим полученное выражение (2) с выражением для силы упругости при колебаниях груза на пружине $F=-k\Delta x$, положим:

$$k = \frac{\Delta\rho}{L}\mathrm{Vg} \qquad (3)$$

и воспользуемся известным выражением для частоты колебаний

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (4)$$

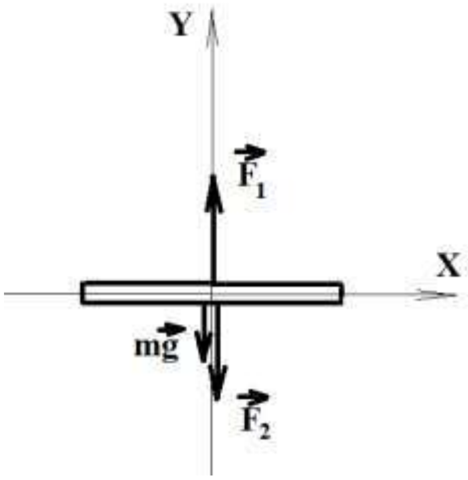
При подстановке массы шарика $m=\rho V$ и (3) в (4) получаем «частоту плавучести»

$$N = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}\frac{\Delta\rho}{\rho}} \qquad (5)$$

<u>Ответ:</u> $N = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}\frac{\Delta\rho}{\rho}}$

Задача 5. (20 баллов). Группа специального назначения захватила секретную лабораторию, в которой был обнаружен прототип дрона, имеющего форму диска диаметром d и массой m, нижняя поверхность которого нагревается до температуры T, а верхняя поддерживается при температуре окружающей среды T_0 ($T_0<T$). При какой величине T, дрон сможет взлететь? Атмосферное давление у поверхности Земли P.

Решение:



После столкновения с нижней поверхностью среднеквадратичная скорость молекул воздуха будет равна:

$$V_{\text{ср.кв.},2} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}},$$

где k – постоянная Больцмана, T– температура поверхности, m_0 – масса молекул. А после отражения от верхней поверхности:

$$V_{\text{ср.кв.},1} = \sqrt{\frac{3kT_0}{m_0}}.$$

Найдем их проекции на ось y: $V^2_{\text{ср.кв.}} = V^2_{x,\text{ср.кв.}} + V^2_{y,\text{ср.кв.}} + V^2_{z,\text{ср.кв.}}$с учетом равноправности направлений можно записать: $V^2_{\text{ср.кв.}} = 3V^2_{y,\text{ср.кв.}}$

Таким образом:

$$V_{\text{ср.кв.},2,y} = \sqrt{\frac{kT}{m_0}} \text{и } V_{\text{ср.кв.},1,y} = \sqrt{\frac{kT_0}{m_0}}$$

Разность переданных плоскости импульсов Δp_y будет равна

$$\Delta p_y = m_0\left\{\sqrt{\frac{kT}{m_0}} - \sqrt{\frac{kT_0}{m_0}}\right\}.$$

Величина подъемной силы, действующей на площадь поверхности S (в проекции на ось y) составит:

$$\left|\overrightarrow{F_1} - \overrightarrow{F_2}\right|_y = \frac{N\Delta p_y}{\Delta t},$$

где N – число молекул воздуха сталкивающееся с площадью S за интервал времени Δt. За время Δt поверхности S достигнут и столкнутся с ней только те молекулы, которые находятся от неё на расстоянии $\Delta l = V_{\text{ср.кв.},1,y} \cdot \Delta t$.

Величина N равна: $N = n \cdot S \cdot \Delta l,$

где n – концентрация молекул воздуха $n = \frac{P}{kT_0}$ (P – давление). Таким образом подъёмная сила составит:

$$\left|\overrightarrow{F_1} - \overrightarrow{F_2}\right|_y = \frac{N\Delta p_y}{\Delta t} = \frac{n \cdot S \cdot \Delta l}{\Delta t} m_0 \left\{\sqrt{\frac{kT}{m_0}} - \sqrt{\frac{kT_0}{m_0}}\right\}$$

$$= n \cdot S\sqrt{\frac{kT_0}{m_0}} \cdot m_0 \left\{\sqrt{\frac{kT}{m_0}} - \sqrt{\frac{kT_0}{m_0}}\right\} =$$

$$= n \cdot S\left\{k\sqrt{T_0 T} - kT_0\right\} = S\frac{P}{kT_0}\left\{k\sqrt{T_0 T_0} - kT_0\right\} = SP\left\{\sqrt{\frac{T}{T_0}} - 1\right\}$$

Или в расчете на единицу поверхности $f = \frac{\left|\overrightarrow{F_1} - \overrightarrow{F_2}\right|_y}{S} = P\left\{\sqrt{\frac{T}{T_0}} - 1\right\}$.

Для подъема дрона над поверхностью земли должно выполняться соотношение $\left|\overrightarrow{F_1} - \overrightarrow{F_2}\right|_y \geq mg$ или $PS\left\{\sqrt{\frac{T}{T_0}} - 1\right\} \geq mg$. С учетом того, что дрон имеет форму диска получим:

$$P\frac{\pi d^2}{4}\left\{\sqrt{\frac{T}{T_0}} - 1\right\} \geq mg$$

или

$$T \geq T_0\left\{\frac{4mg}{P\pi d^2} + 1\right\}^2$$

<u>Ответ:</u> $T \geq T_0\left\{\frac{4mg}{P\pi d^2} + 1\right\}^2$