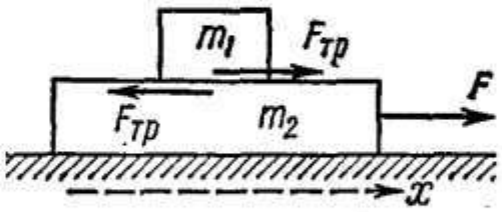
Решения задач Межрегиональной олимпиады школьников на базе ведомственных образовательных организаций в 2021-2022 учебном году 10 класс Заключительный этап. Вариант 1.

Задача 1. (20 баллов). Эскимос захотел построить иглу (жилище из льда). Для этого он нарезал ледяные блоки весом равным m_1, а для их перевозки решил использовать сани. Положив один блок на сани, он стал горизонтально тянуть их с линейно увеличивающейся силой так, что через 1 секунду сила равнялась n. Через время t_0 сани начали выскальзывать из-под блока. Считая, что поверхность гладкая и горизонтальная, а коэффициент трения между санями и ледяным блоком равен k, найти массу саней m_2.

Решение: Запишем основное уравнение динамики для ледяного блока и саней, взяв положительное направление оси x, как показано на рисунке:



$$m_1 a_1 = F_{\text{тр}},$$
$$m_2 a_2 = F - F_{\text{тр}}.$$

Сила F изменяется по закону:

$$F = nt.$$

По мере возрастания силы F будет расти и сила трения $F_{\text{Тр}}$ (вначале она является силой трения покоя). Но $F_{\text{тр}}$ имеет предел $F_{\text{тр макс}} = km_1 g$. Пока этот предел не достигнут, оба тела будут двигаться как единое целое с одинаковыми ускорениями. Когда же сила $F_{\text{тр}}$ достигнет предела, сани начнут выскальзывать из-под бруска, т. е.

$$a_2 \geq a_1.$$

Подставив сюда выражения для a_1 и a_2, с учетом того, что $F_{\text{тр}} = km_1 g$, получим:

$$\frac{nt - km_1 g}{m_2} \geq kg,$$

где знак равенства соответствует моменту $t = t_0$. Отсюда

$$m_2 = \frac{nt - km_1 g}{kg}.$$

<u>Ответ:</u> $m_2 = \frac{nt - km_1 g}{kg}$

Задача 2. (20 баллов). На берегу озера мальчик играл деревянной игрушкой и положил её в воду. Найти работу, которую надо совершить, чтобы полностью погрузить игрушку в воду. Деревянную игрушку считать цилиндром, при этом погружение цилиндра производилось основанием вниз и медленно. Радиус цилиндра 5 см, высота цилиндра 10 см, плотность дерева 0,5 г/см^3, плотность жидкости 1 г/см^3.

Решение: Обозначим через x высоту подводной части цилиндра в процессе погружения. Архимедова сила, действующая на цилиндр, равна

$$F_A = \rho_ж\, g\pi R^2 x,$$

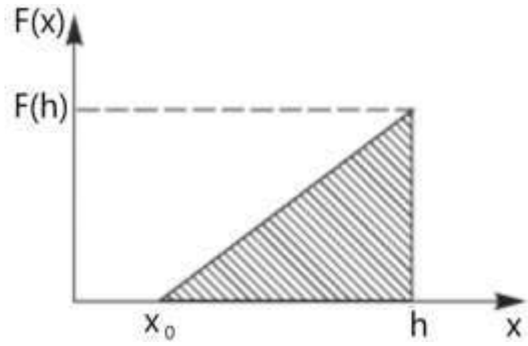
где $\rho_ж -$ плотность жидкости. Поскольку погружение цилиндра происходит медленно, в каждый момент времени силы, приложенные к нему, уравновешены $mg + F = F_A$, где F-внешняя сила, погружающая цилиндр в воду, $m = \rho_д\, \pi R^2 h$ - масса цилиндра, $\rho_д -$ плотность дерева. Из условия плавания цилиндра $\rho_д g\pi R^2 h = \rho_ж g\pi R^2 x_0$ находим высоту его подводной части в свободном состоянии:

$x_0 = \frac{\rho_д\, h}{\rho_ж}$. Следовательно, зависимость силы, погружающей цилиндр в жидкость, от химеет вид:

$$\mathrm{F(x)} = F_A - mg = \rho_ж g\pi R^2 x - \rho_д g\pi R^2 h = \rho_ж g\pi R^2\left(x - \frac{\rho_д\, h}{\rho_ж}\right) =$$
$$= \rho_ж g\pi R^2 (x - x_0).$$

Работа этой силы на перемещение (h-x_0) может быть вычислена графическим способом как площадь заштрихованного треугольника (см. рисунок):

$$\mathrm{A} = \frac{1}{2}\,\mathrm{F}(h)(h - x_0) = \frac{1}{2}\rho_д g\pi R^2 (h - x_0)^2 = \frac{1}{2}\rho_д g\pi R^2\left(h - \frac{\rho_д\, h}{\rho_ж}\right)^2 =$$
$$= \frac{1}{2}\rho_ж\, g\, \pi R^2 h^2 \left(1 - \frac{\rho_д}{\rho_ж}\right)^2 \approx 0{,}1 \text{ Дж}.$$



<u>Ответт:</u> $\mathrm{A} = \frac{1}{2}\rho_ж\, g\, \pi R^2 h^2 \left(1 - \frac{\rho_д}{\rho_ж}\right)^2 \approx 0{,}1$ Дж.

Задача 3. (20 баллов). Метеозонд сферической формы массы m и постоянного объема V наполнен He. Шар стартует с поверхности Земли при нормальном атмосферном давлении P, температуре T и плотности воздуха ρ, давление He равно атмосферному**.** Температуру атмосферного воздуха считать постоянной, объемом оболочки метеозонда пренебречь. Определить максимальную высоту подъема h.

Решение: Максимальная высота подъема h определяется равенством силы Архимеда F_a и силы тяжести F, плотность воздуха на высоте h равняется $\boldsymbol{\rho_h}$, плотность гелия $\boldsymbol{\rho_{He}}$.

$$\boldsymbol{F} - F_a = \boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{\rho_h V g = mg + \rho_{He} V g} \qquad (1)$$

Найдем плотность **He** из уравнения состояния. Пусть $\boldsymbol{m_{\mathrm{He}}}$ масса **He,** $\boldsymbol{M}$ молярная масса He.

$$\boldsymbol{PV = m_{\mathrm{He}} RT/M}$$

$$\boldsymbol{\rho_{He} = PM/\,RT} \qquad (2)$$

Найдем плотность воздуха на высоте h из (1) с учетом (2):

$$\boldsymbol{\rho_h = (m + \rho_{He} V)/\,V = (RTm + PMV)/VRT} \qquad (3)$$

Воспользуемся барометрической формулой, где M_a это молярная масса воздуха, и выразим давление через плотность из уравнения состояния.

$$P_h = Pe^{-\frac{M_a g h}{RT}}$$

$$P = \rho RT/M_a$$

$$\boldsymbol{\rho}_h = \boldsymbol{\rho} e^{-\frac{\rho g h}{\mathrm{P}}} \qquad (4)$$

Логарифмируем это выражение и подставляем значение $\boldsymbol{\rho_h}$:

Из (3) и (4) получим:

$$h = \frac{P}{\boldsymbol{\rho g}} \ln \frac{\boldsymbol{\rho V R T}}{\boldsymbol{RTm} + \mathrm{PM}\boldsymbol{V}}$$

Ответ: $h = \frac{P}{\boldsymbol{\rho g}} \ln \frac{\boldsymbol{\rho V R T}}{\boldsymbol{RTm} + \mathrm{PM}\boldsymbol{V}}$

Задача 4. (20 баллов). Золотая монета подброшена вертикально вверх так, что плоскость монеты вертикальна. Вблизи верхней точки траектории монета попадает в магнитное поле с индукцией B=30 Тл, силовые линии которого горизонтальны и параллельны плоскости монеты. Найдите ускорение монеты в верхней точке. Оцените влияние на него магнитного поля и воздуха. Ускорение свободного падения g=9,8155 м·с$^{-2}$, плотность золота ρ=19,32 г·см$^{-3}$, плотность воздуха $\rho_в$=1,205·10^{-3} г·см$^{-3}$ электрическая постоянная ε_0=8,85·10^{-12} Ф·м$^{-1}$. Поле однородное.

Решение: Вблизи верхней точки траектории скорость монеты мала, и сопротивлением воздуха можно пренебречь. Тогда на монету действуют: сила тяжести $F_т$, выталкивающая сила (сила Архимеда) $F_А$ и сила со стороны магнитного поля $F_м$.

Сила тяжести:

$$F_т = mg = \rho Vg,$$

где m – масса монеты, V – ее объем.

Сила Архимеда:

$$F_А = \rho_в Vg.$$

Следовательно, $F_A = \frac{\rho_в}{\rho} F_т$.

Теперь найдем силу, действующую на монету со стороны магнитного поля. Пусть монета имеет площадь плоской поверхности S и толщину l и движется в магнитном поле так, что ее плоскость параллельна силовым линиям. На электроны внутри монеты будет действовать сила Лоренца, направленная перпендикулярно плоскости монеты. Такая же, но направленная в противоположную сторону, сила будет действовать на положительные ионы металла. Магнитное поле стремится растащить положительные и отрицательные заряды в противоположные стороны. Но смещение зарядов вызовет появление электрического поля, удерживающего заряды. Из условия равенства этих сил находим, что напряженность электрического поля $E=vB$. Таким образом, между двумя сторонами монеты возникнет разность потенциалов $U= vBl$.

Такое же поле создает плоский конденсатор с расстоянием между обкладками l и площадью обкладки S. Заряд конденсатора:

$$q = \frac{\varepsilon_o SU}{l} = \frac{\varepsilon_o S}{l} vBl\ .$$

Если пластинка будет двигаться с ускорением a, то заряд будет изменяться:

$$\frac{\Delta q}{\Delta t} = \varepsilon_o SB \frac{\Delta v}{\Delta t} = \varepsilon_o SBa.$$

Это равносильно появлению тока $I = \varepsilon_o SBa$.

На проводник с током будет действовать сила Ампера:

$$F = IBl\ .$$

Следовательно, на монету, движущуюся с ускорением, будет действовать сила:

$$F_м = \varepsilon_o S B^2 l a.$$

По второму закону Ньютона для падающей монеты:

$$ma = mg - \rho_в V g - \varepsilon_o S B^2 l a.$$

Или $a = g\frac{1-\frac{\rho_в}{\rho}}{1+\frac{\varepsilon_o B^2}{\rho}}$.

Таким образом, магнитное поле уменьшает ускорение. Магнитное поле с индукцией в 30 Тл – это очень сильное постоянное магнитное поле, получаемое в лабораториях с помощью мощных электромагнитов. Однако, подставляя значения магнитной индукции и плотности в знаменатель формулы для ускорения, получаем, что величина $\frac{\varepsilon_o B^2}{\rho}$ пренебрежимо мала по сравнению с единицей. Таким образом

$a = g(1 - \frac{\rho_в}{\rho})$ = 9,815 м/с^2.

Ответ: $a = g(1 - \frac{\rho_в}{\rho})$ = 9,815 м/с^2.

Задача 5. (20 баллов). В цилиндрическом сосуде, стоящем на горизонтальном столе, под поршнем массы M и площадью S находится вода. Поршень может свободно без трения перемещаться внутри цилиндра. Из небольшого бокового отверстия в стенке сечения s, находящегося у дна сосуда, вытекает струя воды (s<<S). Высота воды в сосуде равна h.Определить величину и направление силы трения покоя, действующей на сосуд.

Решение: 1) Работа силы тяжести по перемещению поршня и воды в сосуде за время Δt равна

$$\Delta A = \Delta m g h + M g u \Delta t$$

где Δm - масса вытекшей за время Δt воды, u – скорость поршня, $u\Delta t$ – перемещение поршня.

$$\Delta m = \rho S u \Delta t \qquad (1)$$

где ρ – плотность воды. Работа идет на сообщение кинетической энергии массе воды величиной Δm:

$$\Delta m v^2/2 = \Delta A = \Delta m g h + M g u \Delta t \qquad (2)$$

Из уравнения (1) получаем для $u\Delta t$ выражение

$$u\Delta t = \Delta m/\rho S$$

и подставляем его в уравнение (2):

$$\Delta m v^2/2 = \Delta m g h + M g \Delta m/\rho S.$$

Далее имеем

$$v^2=2gh + 2Mg/\rho S \qquad (3)$$

2) Запишем 2-й закон Ньютона для вытекающей из сосуда струи:

$$\Delta p=F\Delta t \qquad (4)$$

$$\Delta p=\Delta mv=(\rho sv\Delta t)v= \rho sv^2\Delta t \qquad (5)$$

где Δp - изменение импульса, вытекающей из сосуда воды массой Δm за время Δt, F – сила, действующая на вытекающую воду. Из (3), (4) и (5) следует, что:

$$F=2gs(\rho h+M/S)$$

Согласно 3-му закону Ньютона сила, действующая на воду, равна и противоположна силе, действующей на сосуд со стороны воды. Отсюда следует, что сила трения покоя, действующая на сосуд, равна силе F и направлена в направлении вытекающей струи:

$$F_{тр}=2gs(\rho h+M/S)$$

Ответ: $F_{тр}=2gs(\rho h+M/S)$