РЕШЕНИЯ И ОТВЕТЫ К ОЛИМПИАДЕ 9 – го КЛАССА- 2018 год. Очный тур.

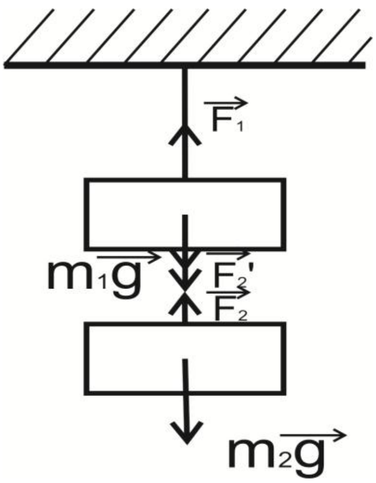
Вариант 1.

Задача 1.

К потолку на невесомой нити подвешен груз 1. В свою очередь, к нижней части этого груза на невесомой нити подвешен груз 2. Отношение сил натяжения верхней и нижней нитей известно: $\frac{F_1}{F_2} = n$. Найти отношение масс грузов $\mu = \frac{m_1}{m_2}$.

Решение:

Нарисуем рисунок, соответствующий условию задачи, и изобразим на нем все силы, действующие на висящие тела.



Запишем условие равновесия нижнего (2-го) тела (в проекции на вертикальную ось): $m_2g = F_2$.

Запишем условие равновесия верхнего (1-го) тела (в проекции на вертикальную ось): $m_1g + F_2 = F_1$.

Поделив второе выражение на F_2, получим:

$$n = \frac{F_1}{F_2} = 1 + \frac{m_1}{m_2} = 1 + \mu.$$

Окончательно имеем:

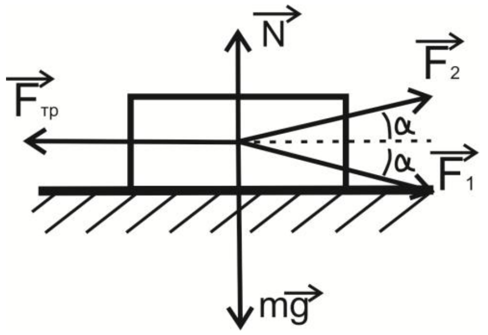
$$\mu = n - 1.$$

Задача 2.

Если к телу, находящемуся на горизонтальной поверхности, приложить силу $F = 120$ Н, направленную вниз (к земле) под углом $\alpha = 60°$ к горизонту, то тело будет двигаться без ускорения. С каким ускорением а будет двигаться это же тело, если ту же силу направить вверх (от земли) под тем же углом α к горизонту? Масса тела $m = 25$ кг. Ускорение свободного падения $g = 10\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$, $\sin 60° = 0{,}87$.

Решение:

Нарисуем рисунок, соответствующий условию задачи, и изобразим на нем все силы, действующие на тело (для обоих условий задачи).



Напишем уравнения, определяющие движение тела без ускорения (1-е условие задачи) в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси соответственно:

$$0 = ma = F \cdot cos\ \alpha - F_{тр.1}.$$

$$mg + F \cdot sin\ \alpha = N_1.$$

Оба выражения дают нам возможность найти силу трения скольжения

$F_{тр.1} = F \cdot cos\ \alpha$,

$F_{тр.1} = k \cdot N_1 = k \cdot (mg + F \cdot sin\ \alpha)$.

Приравняв последние два выражения, найдем необходимый (для дальнейшего решения задачи) коэффициент трения скольжения:

$$k = \frac{F \cdot \cos\alpha}{mg + F \cdot \sin\alpha}.$$

Напишем уравнения, определяющие движение тела с ускорением (2-е условие задачи) в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси соответственно:

$$ma = F \cdot cos\ \alpha - F_{тр.2}.$$

$$mg = F \cdot sin\ \alpha + N_2.$$

Найдем из последнего выражения силу трения скольжения $F_{тр.2}$.

$$F_{тр.2} = k \cdot N_2 = k \cdot (mg - F \cdot sin\ \alpha).$$

У нас есть все, чтобы ответить на вопрос задачи – найти ускорение, с которым будет двигаться тело:

$$a = \frac{F \cdot \cos\alpha - F_{тр.2}}{m} = \frac{F \cdot \cos\alpha - \frac{F \cdot \cos\alpha}{mg + F \cdot \sin\alpha}(mg - F \cdot \sin\alpha)}{m}.$$

Упрощая выражение для a, окончательно получим:

$$a = \frac{F^2 \cdot \sin 2\alpha}{m(mg + F \cdot \sin\alpha)} = 1.4\,\frac{м}{с^2}.$$

Задача 3.

Какое напряжение U показывает вольтметр с внутренним сопротивлением $R = 10$ Ом, если через него за время $\tau = 10$ с протекает электрический заряд $q = 1$ Кл? Сила тока, текущего через прибор, постоянна.

Решение:

Показание вольтметра определяются выражением $U = I \cdot R$, где I – ток, текущий через прибор, R – внутреннее сопротивление вольтметра. Так как сила тока I, текущего через прибор, постоянна, она легко находится из условия задачи: $I = q/\tau$. Окончательно имеем:

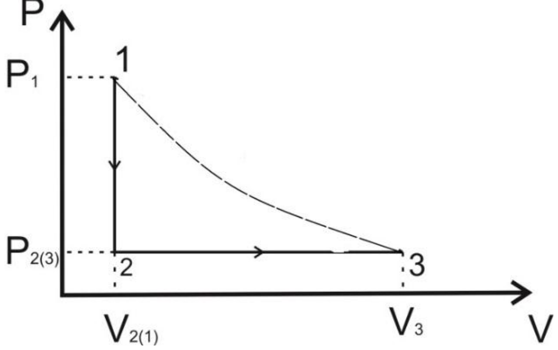
$$U = qR/\tau = 1\ В.$$

Задача 4.

Один моль идеального газа, взятого при температуре $T_0 = 300$ К, изохорически охладили так, что его давление в сосуде упало в $n = 3$ раза. Затем газ изобарически расширили так, что его температура стала равной первоначальной. Какое количество теплоты Q получил газ в указанном эксперименте? Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}314\ \frac{\text{Дж}}{\text{К·моль}}$.

Решение:

Изобразим в «координатах» PV два последовательных процесса (изохорический (1⟼2) и изобарический (2⟼3)), в которых участвует 1 моль идеального газа согласно условию задачи.



Для каждого из процессов напишем 1-е начало термодинамики:

$$Q_{1\to2} = \Delta U_{1\to2} + A_{1\to2}.$$
$$Q_{2\to3} = \Delta U_{2\to3} + A_{2\to3}.$$

Сложив эти два выражения, получим:

$$Q = Q_{1\to2} + Q_{2\to3} = \Delta U_{1\to3} + A_{2\to3}.$$

Здесь мы учли, что газ при изохорическом охлаждении не совершал работы ($A_{1\to2} = 0$).

Согласно условию задачи начальная (1-я) и конечная (3-я) точки состояния газа принадлежат одной изотерме. Поскольку внутренняя энергия идеального газа зависит только от одного термодинамического параметра – температуры $-\Delta U_{1\to3} = 0$. В результате получаем, что количество теплоты Q, которое получил газ в указанном эксперименте, определяется только работой газа при изобарическом процессе:

$$Q = A_{2\to3} = P_2 \cdot \left(V_3 - V_{2(1)}\right) = \frac{P_1}{n} \cdot V_1 \left(\frac{V_3}{V_1 - 1}\right) = \frac{P_1 \cdot V_1}{n}\left(\frac{V_3}{V_1 - 1}\right) = \frac{R \cdot \mathrm{T}_0}{n}\left(\frac{V_3}{V_1 - 1}\right).$$

Учтем еще раз, что начальная (1-я) и конечная (3-я) точки состояния газа принадлежат одной изотерме:

$P_1 V_1 = P_3 V_3 \to P_1 V_1 = \frac{P_1}{n} \cdot V_3 \to V_1 = \frac{1}{n} \cdot V_3 \to \frac{V_3}{V_1} = n.$

Окончательно имеем:

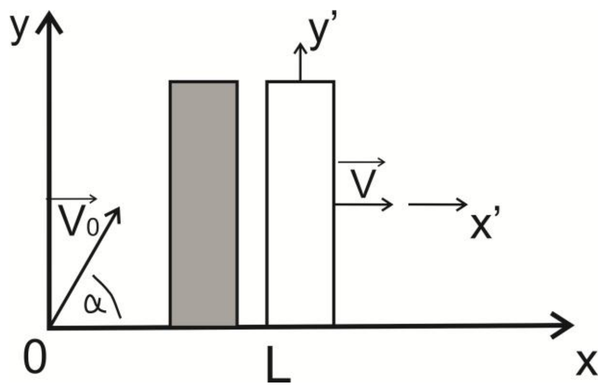
$$Q = R\mathrm{T}_0 \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right) = 1{,}7\ \text{кДж}.$$

Задача 5.

Маленький легкий шарик, брошенный со скоростью v_0 под углом α к горизонту, упруго ударяется о вертикальную (очень тяжелую) стенку, движущуюся с постоянной скоростью V в том же направлении что и шарик. Скорости $\overrightarrow{v_0}$ и $\vec{V}$ лежат в одной плоскости. Известно, что после соударения со стенкой, шарик возвращается в ту точку, откуда его бросили. Через какое время τ после броска произошло столкновение шарика со стенкой? На каком расстоянии L от точки бросания шарика находилась стенка когда произошло столкновение шарика со стенкой?

Решение:

Нарисуем рисунок, соответствующий условию задачи. Этот рисунок соответствует нашей работе в так называемой лабораторной инерциальной системе отсчета (ЛИСО), связанной с землей.



Шарик в момент броска находится в начале координат. Левая сторона стенки в момент броска шарика находится в точке, отстоящей от начала координат на расстоянии L_0 (она не дана по условию задачи). Координаты шарика (в ЛИСО) изменяются со временем по закону:

$$x(t) = v_0 \cos\alpha\ t, \text{для времен } t \le \tau.$$

$$y(t) = v_0 \sin\alpha\ t - \frac{gt^2}{2}, \text{для времен } t \le t_{\text{падения шарика на землю}}.$$

Координата левой стороны стенки $X(t)$ изменяется со временем по закону:

$$X(t) = L_0 + Vt.$$

Здесь L_0 – начальное расстояние от начала координат до стенки: $L_0 = X(t = 0)$.

В момент соударения τ шарика со стенкой $X(\tau) = x(\tau)$, или $v_0 \cos\alpha \cdot \tau = L_0 + V\tau$.

Отсюда получаем время соударения:

$$\tau = \frac{L_0}{v_0 \cos\alpha - V} \tag{1}$$

Из положительности τ получаем $v_0 \cos\alpha - V > 0$. Это физическое условие того, что брошенный шарик «догонит» удаляющуюся от него стенку.

Кроме того, можно записать искомое расстояние L (вдоль горизонта) от точки бросания шарика до точки его столкновения со стенкой:

$$L = X(\tau) = x(\tau) = \frac{L_0\, v_0 \cos\alpha}{v_0 \cos\alpha - V} \tag{2}$$

Запишем проекции скоростей шарика на оси координат:

$$v_x(t) = v_0 \cos\alpha, \text{для времен } t \le \tau.$$

$$v_y(t) = v_0 \sin\alpha - gt, \qquad \text{для времен } t \le t_{\text{падения шарика на землю}}.$$

Для простоты и наглядности дальнейшего решения задачи перейдем в движущуюся инерциальную систему отсчета (ДИСО), связанную со стенкой. В этой ДИСО скорость стенки равна нулю, а скорость шарика $\vec{v}^*$ равна $\vec{v}^* = \vec{v} - \vec{V}$, где $\vec{v}$ и $\vec{V}$ – скорости шарика и стенки в ЛИСО.

В проекции на ось x: $v_x^* = v_x - V$.

Акт упругого соударения шарика с очень тяжелой (по условию задачи) стенкой в ДИСО описывается очень просто:

$$v_x^*(\tau + 0) = -v_x^*(\tau - 0).$$

В левой части этого равенства записана проекция скорости шарика (в ДИСО) в момент времени (τ+0), следующий после столкновения шарика с неподвижной стенкой.

В правой части этого равенства записана проекция скорости шарика (в ДИСО) в момент времени $(\tau - 0)$, предшествующий столкновению шарика с неподвижной стенкой.

Само время упругого столкновения шарика со стенкой равно нулю.

Путем простых преобразований найдем проекцию скорости шарика $v_x(\tau+0)$ на ось x (в ЛИСО) после соударения шарика со стенкой.

$$v_x^*(\tau-0) = v_x(\tau-0) - V = v_0\cos\alpha - V$$

$$v_x^*(\tau+0) = -v_x^*(\tau-0) = V - v_0\cos\alpha$$

$$v_x(\tau+0) = v_x^*(\tau+0) + V = 2V - v_0\cos\alpha$$

Поскольку шарик после соударения со стенкой летит в сторону, противоположную направлению оси x (чтобы вернуться согласно условию задачи в точку бросания – начало координат), потребуем, чтобы выполнялось условие

$$v_x(\tau+0) < 0, \text{т. е. } 2V < v_0\cos\alpha$$

Далее работаем только в ЛИСО.

Пусть τ_2 – время полета шарика от момента столкновения со стенкой до возвращения в точку бросания.

Опишем движение шарика от момента столкновения со стенкой до возвращения в точку бросания.

$$x(t) = L + v_x(t)t\,, \tau < t < \tau + \tau_2$$

В момент возвращения шарика в начало координат:

$$0 = x(\tau+\tau_2) = L + v_x(\tau+0)\tau_2 = \frac{L_0\, v_0\cos\alpha}{v_0\cos\alpha - V} + (2V - v_0\cos\alpha)\tau_2 \qquad (3)$$

Обратим внимание на еще одно простое соотношение между неизвестными величинами задачи, являющееся следствием того, что шарик после упругого соударения со стенкой возвращается в точку бросания:

$$\tau\, v_0\cos\alpha = (v_0\cos\alpha - 2V)\tau_2 = L \qquad (4)$$

Из последнего равенства следует:

$$\tau_2 = \tau\,\frac{v_0\cos\alpha}{(v_0\cos\alpha - 2V)} = \frac{v_0\cos\alpha}{(v_0\cos\alpha - 2V)}\,\frac{L_0}{v_0\cos\alpha - V} \qquad (5)$$