Межрегиональная олимпиада школьников на базе ведомственных образовательных организаций по математике

11 КЛАСС

1. Есть 101 клетка. Двое поочередно слева направо вписывают в эти клеточки по одной из цифр от 0 до 9. Если после заполнения всех клеток сумма всех записанных цифр будет делиться на 11, то выиграет игрок, ходивший первым, а если не будет делиться на 11 – то вторым. Какой из игроков выиграет при правильной своей игре и любой игре соперника? Ответ обосновать.

2. Найдите количество цифр в десятичной записи числа 2^{100}, если известно, что десятичная запись числа 2^{200} содержит 61 цифру.

3. Сократите дробь $\frac{2x^6+5x^4-3x^3+2x^2-12x-14}{4x^6-4x^4-6x^3-3x^2+25x-28}$. В результате сокращения степени многочленов в числителе и знаменателе должны уменьшиться.

4. Решите уравнение $8cos^5x-5cosx-2cos3x=1$.

5. Известно, что положительные числа x,y,z удовлетворяют системе:

$$\begin{cases} x^2+y^2+xy=529 \\ x^2+z^2+\sqrt{3}xz=441 \\ z^2+y^2=144 \end{cases}$$

Найдите значение выражения $\sqrt{3}xy+2yz+xz$.

6. Зафиксируем 10 натуральных чисел $n_1,n_2,\dots,n_{10}$ и обозначим через n их сумму $n=n_1+\dots+n_{10}$. Предположим теперь, что на доске в строчку записаны n чисел $a_1,\dots,a_n$, каждое из которых равно либо 0, либо 1. Эти числа (в том порядке как они записаны) разбивают на 10 групп:

$$\underbrace{a_1,\dots,a_{n_1}}_{n_1},\underbrace{a_{n_1+1},\dots,a_{n_1+n_2}}_{n_2},\dots,\underbrace{a_{n_1+\dots n_9+1},\dots,a_n}_{n_{10}}.$$

Группу назовем ненулевой, если в ней содержится хотя бы одна 1. В результате разбиения, в зависимости от того какие числа $a_1,\dots,a_n$ были взяты изначально, можно получить то или иное число ненулевых групп. Нас будут интересовать такие наборы $a_1,\dots,a_n$, которые при указанном разбиении дают четное число ненулевых групп. Докажите, что число таких наборов $a_1,\dots,a_n$ (где ненулевых групп будет четно) находится по формуле:

$$2^{n-1}+\frac{1}{2}\cdot(2^{n_1}-2)\cdot(2^{n_2}-2)\cdot\ldots\cdot(2^{n_{10}}-2).$$

7. Обозначим через $a_{n,m}$ число, полученное записью подряд всех натуральных чисел от n до m, здесь n и m – натуральные числа, причем $n>m\geq 1$. Так, например, число $a_{4,2}=432$, а число $a_{11,7}=1110987$. Докажите, что среди таких чисел есть число, делящееся на 2022.

8. Решите уравнение $x^2+y^2+1=6xy$, где x и y – натуральные числа