Межрегиональная олимпиада школьников на базе ведомственных образовательных организаций по математике

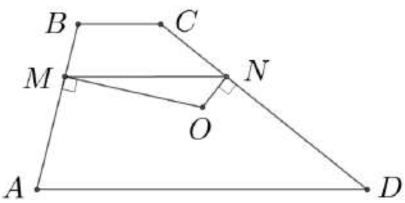
10 КЛАСС

1. 100-значное число имеет вид $a = 1777 \dots 76$ (по середине – 98 цифр 7). Число $\frac{1}{a}$ представили в виде бесконечной периодической дроби. Найдите её период. Ответ обоснуйте.

2. Есть 5 клеток. Двое поочередно слева направо вписывают в эти клеточки по одной из цифр 1 или 2. Если получившееся в итоге 5-значное число будет делиться на 3, то выиграет игрок, ходивший первым, а если не будет делиться на 3 – то вторым. Какой из игроков выиграет при правильной своей игре и любой игре соперника? Ответ обосновать.

3. Пусть A – множество всех таких целых чисел, которые представимы в виде $x2 + 2y2$ где x, y – целые числа. Пусть B – множество всех таких целых чисел, которые представимы в виде $x \quad -$ $6xy + 11y^2$ где x, y – целые числа (например, $6 \in A, \text{т.к.}\ 6 = 2^2 + 2 \cdot 1^2$). Равны ли множества A и B? Ответ обоснуйте. 2

4. Основания трапеции $ABCD$ связаны соотношением $AD = 4 \cdot BC$, сумма углов $\angle A + \angle D = 120^0$. На боковых сторонах выбраны точки M и N таким образом, что $CN{:}ND = BM{:}MA = 1{:}2$. Перпендикуляры, восстановленные в точках M и N к боковым сторонам трапеции, пересекаются в точке O. Найдите AD, если $AO = 1$.



9. Найдите количество цифр в десятичной записи числа 2^{120}, если известно, что десятичная запись числа 2^{200} содержит 61 цифру.

5. Обозначим через $a_{n,m}$ число, полученное записью подряд всех чисел от n до m включительно, здесь n и m – натуральные числа, причем $n > m \geq 1$. Так, например, число $a_{4,2} = 432$, а число $a_{11,7} = 1110987$. Докажите, что среди таких чисел есть число, делящееся на 2021.

6. Докажите, что система уравнений не имеет решений.

$$\begin{cases} x^3 + x + y + 1 = 0 \\ yx^2 + x + y = 0 \\ y^2 + y - x^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

7. Зафиксируем 10 натуральных чисел $n_1, n_2, \dots, n_{10}$ и обозначим через n их сумму $n = n_1 + \dots + n_{10}$. Предположим теперь, что на доске в строчку записаны n чисел $a_1, \dots, a_n$, каждое из которых равно либо 0, либо 1. Эти числа (в том порядке как они записаны) разбивают на 10 групп:

$$\underbrace{a_1, \dots, a_{n_1}}_{n_1}, \underbrace{a_{n_1+1}, \dots, a_{n_1+n_2}}_{n_2}, \dots, \underbrace{a_{n_1+\dots n_9+1}, \dots, a_n}_{n_{10}}.$$

Группу назовем ненулевой, если в ней содержится хотя бы одна 1. В результате разбиения, в зависимости от того какие числа $a_1, \dots, a_n$ были взяты изначально, можно получить то или иное число ненулевых групп. Нас будут интересовать такие наборы $a_1, \dots, a_n$, которые при указанном разбиении дают четное число ненулевых групп. Докажите, что число таких наборов $a_1, \dots, a_n$ (где ненулевых групп будет четно) находится по формуле

$$2^{n-1} + \frac{1}{2} \cdot (2^{n_1} - 2) \cdot (2^{n_2} - 2) \cdot \dots \cdot (2^{n_{10}} - 2).$$