ОТБОРОЧНЫЙ ТУР

9 КЛАСС

1. У Олега есть 550 рублей, и он хочет подарить маме на 8 Марта тюльпаны, причем непременно их должно быть нечётное число, и ни один оттенок цвета не должен повторяться. В магазине, куда пришел Олег, один тюльпан стоит 49 рублей, и есть в наличии цветы одиннадцати оттенков. Сколько существует способов у Олега подарить маме цветы? (Ответ в задаче должен быть компактным выражением, не содержащим знаков суммирования, многоточий и т.п.)

Решение:

Из условия очевидно, что максимальное количество цветов в букете – 11.

<u>1 способ</u>

Используя свойство биномиальных коэффициентов

$$C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \cdots = 2^{n-1},$$

а также учитывая их комбинаторный смысл, получим, что число способов сформировать букет из нечетного количества цветов не более 11-ти оттенков (при условии, что ни один оттенок не должен повторяться) равно:

$$C_{11}^1 + C_{11}^3 + C_{11}^5 + \cdots + C_{11}^{11} = 2^{10} = 1024.$$

<u>2 способ</u>

Рассмотрим 10 цветов 10 различных оттенков. Собрать букет из этих цветов без учёта чётности можно 2^{10} способами. Если в букете нечётное количество цветов, то мы его оставляем, если же чётное – добавляем неиспользованный одиннадцатый цветок. Таким образом, общее количество способов собрать букет равно 2^{10}.

Ответ: 1024.

2. Отличные от нуля числа a и b являются корнями квадратного уравнения $x^2 - 5px + 2p^3 = 0$. Уравнение $x^2 - ax + b = 0$ имеет единственный корень. Найдите p. Решение обоснуйте.

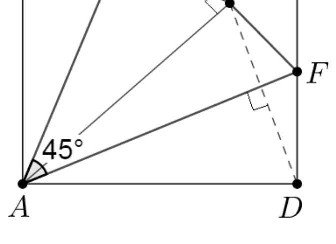
Решение:

Так как уравнение $x^2 - ax + b = 0$ имеет единственный корень, то $b = \frac{a^2}{4}$. По теореме Виета имеем равенства: $a + b = 5p; ab = 2p^3$.

Подставляя $b = \frac{a^2}{4}$ в последнее равенство, получим: $a = 2p$. Учитывая, что a и b отличны от нуля, найдём $p = 3$.

Ответ: 3.

3. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ выбраны точки E и F таким образом, что угол EAF равен 45^0. Длина стороны квадрата равна 1. Найдите периметр треугольника CEF. Решение обоснуйте.



Решение:

Если отразить точку D относительно прямой AF, а затем относительно прямой AE, то она перейдет в точку B. Действительно, композиция двух осевых симметрий относительно пересекающихся прямых – это поворот на удвоенный угол между прямыми. То есть в нашем случае эти две симметрии эквивалентны повороту на угол 90^0 относительно точки A.

Это означает, что образ точки D при симметрии относительно AF и образ точки B при симметрии относительно AE – это одна и та же точка; на рисунке она обозначена K. Из точки K отрезки AE и AF видны под углом 90^0 (при симметрии сохраняются величины углов, поэтому, например, углы ABE и AKE равны). Значит точка K – это основание перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую EF.

И, наконец, поскольку $BE = EK$ и $DF = FK$ (при симметрии длины отрезков сохраняются), видим, что периметр треугольника CEF равен сумме длин сторон BC и CD квадрата.

Ответ: 2.

4. Известно, что число $\cos 6^0$ является корнем уравнения $32t^5 - 40t^3 + 10t - \sqrt{3} = 0$. Найдите остальные четыре корня этого уравнения. (Ответы в задаче должны быть компактными выражениями, не содержащими знаков суммирования, многоточий и радикалов.)

Решение:

$\cos 5x = 16cos^5x - 20cos^3x + 5cosx$. Тогда остальными корнями уравнения будут числа $\cos 66^0$, $\cos 78^0$, $\cos 138^0$, $\cos 150^0$.

Ответ: $\cos 66^0$, $\cos 78^0$, $\cos 138^0$, $\cos 150^0$

5. Найти площадь многоугольника, координаты вершин которого являются решениями системы уравнений $\begin{cases} x^4 + \frac{7}{2}x^2y + 2y^3 = 0 \\ 4x^2 + 7xy + 2y^3 = 0 \end{cases}$.

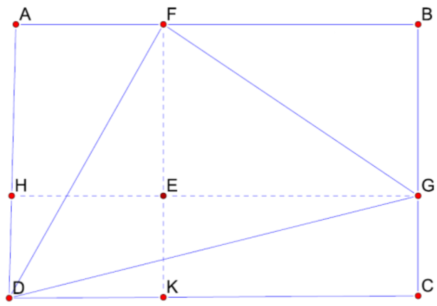
Решение:

Система уравнений и имеет всего три действительных решения: $(0;0), (2;-1), \left(-\frac{11}{2}; -\frac{11}{2}\right)$.

Площадь треугольника, вершины которого имеют такие координаты, равна $16\frac{1}{2}$.

Ответ: $16\frac{1}{2}$

6. На сторонах AB и BC прямоугольника $ABCD$ выбраны точки F и G соответственно. На сторону CD из точки F опущен перпендикуляр FK. На сторону AD из точки G опущен перпендикуляр GH. Точка пересечение FK и GH обозначена через E. Найдите площадь треугольника DFG, если известно, что площади прямоугольников $ABCD$ и $HEKD$ равны 20 и 8 соответственно.



Решение:

Пусть $AD = a$, $DC = b$, $HD = x$, а $DK = y$.

$$S_{DFG} = S_{ABCD} - S_{AFD} - S_{FGB} - S_{DGC} = ab - \frac{1}{2}ay - \frac{1}{2}(b-y)(a-x) - \frac{1}{2}bx$$
$$= ab - \frac{1}{2}ay - \frac{1}{2}ay(ab - bx - ay + xy) - \frac{1}{2}bx$$
$$= ab - \frac{1}{2}ay - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}bx + \frac{1}{2}ay - \frac{1}{2}xy - \frac{1}{2}bx = \frac{ab - xy}{2} = \frac{S_{ABCD} - S_{HEKD}}{2} = 6$$

Ответ: 6