Межрегиональная олимпиада школьников на базе ведомственных образовательных организаций по математике

9 КЛАСС

1. 100-значное число имеет вид $a = 1777\dots76$ (по середине – 98 цифр 7). Число $\frac{1}{a}$ представили в виде бесконечной периодической дроби. Найдите её период. Ответ обоснуйте.

Решение:

Заметим, что $a = 16 \cdot 111\dots11$. Последнее число b состоит из 99 единиц. По правилам перевода обыкновенной дроби в десятичную, число $\frac{1}{b} = 0,(00\dots09)$. Её период равен 99. Тогда при умножении этой дроби на число $\frac{1}{16} = 0{,}0625$ период не изменится.

Ответ: 99.

2. Есть 5 клеток. Двое поочередно слева направо вписывают в эти клеточки по одной из цифр 1 или 2. Если получившееся в итоге 5-значное число будет делиться на 3, то выиграет игрок, ходивший первым, а если не будет делиться на 3 – то вторым. Какой из игроков выиграет при правильной своей игре и любой игре соперника? Ответ обосновать.

Решение:

Напомним признак делимости числа на 3: целое число делится нацело на 3 тогда и только тогда, когда сумма всех его цифр делится нацело на 3.

Приведём выигрышную стратегию для второго игрока. На каждом шаге, если первый напишет 1, второй – 2. Если первый напишет 2, второй – 1. В итоге на 4-ом шаге записанных цифр делится на 3. А значит, что бы в 5–ю клетку ни вписал первый, получившееся 5-значное число не будет делиться на 3.

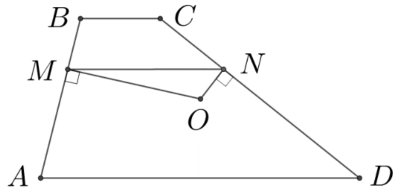
Ответ: второй игрок.

3. Пусть A – множество всех таких целых чисел, которые представимы в виде $x^2 + 2y^2$ где x, y – целые числа. Пусть B – множество всех таких целых чисел, которые представимы в виде $x^2 - 6xy + 11y^2$ где x, y – целые числа (например, $6 \in A, \text{т.к.}\, 6 = 2^2 + 2 \cdot 1^2$). Равны ли множества A и B? Ответ обоснуйте.

Решение:

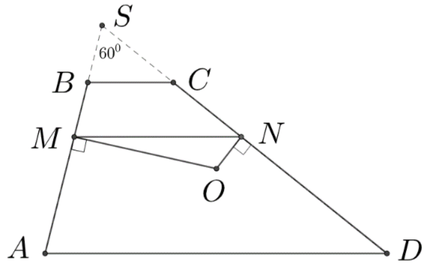
Перепишем элементы множества B виде $x^2 - 6xy + 11y^2 = (x - 3y)^2 + 2y^2$. Отсюда очевидно, что любой элемент множества A является элементом множества B и наоборот.

4. Основания трапеции $ABCD$ связаны соотношением $AD = 4 \cdot BC$, сумма углов $\angle A + \angle D = 120^0$. На боковых сторонах выбраны точки M и N таким образом, что $CN{:}ND = BM{:}MA = 1{:}2$. Перпендикуляры, восстановленные в точках M и N к боковым сторонам трапеции, пересекаются в точке O. Найдите AD, если $AO = 1$.



Решение:

Продлим боковые стороны до их пересечения в точке S. Угол S равен 60^0. Треугольники ASD и BSC подобны; коэффициент подобия равен 4. Кроме того, по условию AM вдвое длиннее BM. Отсюда несложно заметить, что $BS = BM$. Поэтому $AM = MS$. Следовательно MO – серединный перпендикуляр к стороне AS. Аналогично, NO – серединный перпендикуляр к DS. Таким образом, точка O – центр описанной около треугольника ASD окружности, а AO – ее радиус. Запишем формулу для радиуса описанной окружности $AO = \frac{AD}{2 \cdot \sin \angle S}$. Отсюда $AD = \sqrt{3}$.



Ответ: $\sqrt{3}$.

5. Найдите количество цифр в десятичной записи числа 2^{120}, если известно, что десятичная запись числа 2^{200} содержит 61 цифру.

Решение:

Чтобы понять сколько цифр содержится в записи натурального числа a, надо найти такое неотрицательное целое число n, что будет справедливым неравенство $10^{n-1} \leq a < 10^n$. Такое число n, очевидно, единственно. (Например, $10^2 \leq 992 < 10^3$, поэтому в записи числа 992 три цифры.) Итак, надо найти такое целое неотрицательное n, что $10^n \leq 2^{120} < 10^{n+1}$. По условию $10^{60} \leq 2^{200} < 10^{61}$. Возведя обе части в степень $\frac{3}{5}$, получим $10^{36} \leq 2^{120} < 10^{36+\frac{3}{5}}$. Значит, в десятичной записи числа 2^{120} содержится 37 цифр.

Ответ: 37.

6. Обозначим через $a_{n,m}$ число, полученное записью подряд всех чисел от n до m включительно, здесь n и m – натуральные числа, причем $n > m \geq 1$. Так, например, число $a_{4,2} = 432$, а число $a_{11,7} = 1110987$. Докажите, что среди таких чисел есть число, делящееся на 2021.

Решение:

Рассмотрим числа вида $a_{n,1}$. Так как чисел указанного вида бесконечно много, то среди них найдутся два числа $a_{n,1}$ и $a_{k,1}$, $n > k$, имеющие одинаковые остатки от деления на 2021. Тогда разность $a_{n,1} - a_{k,1}$ делится нацело на 2021. При этом $a_{n,1} - a_{k,1} = a_{n,k+1} \cdot 10^{n-k}$. Так как числа 2021 и 10^{n-k} взаимно просты, то число $a_{n,k+1}$ делится нацело на 2021.

7. Докажите, что система уравнений не имеет решений:

$$\begin{cases} x^3 + x + y + 1 = 0 \\ yx^2 + x + y = 0 \\ y^2 + y - x^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

Решение:

Заметим, что $y(x^3 + x + y + 1) - x(yx^2 + x + y) = y^2 + y - x^2 = 0$, что противоречит третьему равенству системы.

8. Зафиксируем 10 натуральных чисел $n_1, n_2, \dots, n_{10}$ и обозначим через n их сумму $n = n_1 + \dots + n_{10}$. Предположим теперь, что на доске в строчку записаны n чисел $a_1, \dots, a_n$, каждое из которых равно либо 0, либо 1. Эти числа (в том порядке как они записаны) разбивают на 10 групп:

$$\underbrace{a_1, \dots, a_{n_1}}_{n_1}, \underbrace{a_{n_1+1}, \dots, a_{n_1+n_2}}_{n_2}, \dots, \underbrace{a_{n_1+\dots n_9+1}, \dots, a_n}_{n_{10}}.$$

Группу назовем ненулевой, если в ней содержится хотя бы одна 1. В результате разбиения, в зависимости от того какие числа $a_1, \dots, a_n$ были взяты изначально, можно получить то или иное число ненулевых групп. Нас будут интересовать такие наборы $a_1, \dots, a_n$, которые при указанном разбиении дают четное число ненулевых групп. Докажите, что число таких наборов $a_1, \dots, a_n$ (где ненулевых групп будет четно) находится по формуле:

$$2^{n-1} + \frac{1}{2} \cdot (2^{n_1} - 2) \cdot (2^{n_2} - 2) \cdot \dots \cdot (2^{n_{10}} - 2).$$

Решение:

Искомое число наборов находим суммируя количество наборов с заданным числом k ненулевых групп:

При k=0 такой набор единственный;

При k=2 $\sum_{1 \leq i < j \leq 10} (2^{n_i} - 2) \cdot (2^{n_j} - 2)$;

при k=4 $\sum_{1\le i<j<l<s\le 10}(2^{n_i}-2)\cdot(2^{n_j}-2)\cdot(2^{n_l}-2)\cdot(2^{n_s}-2)$;

…

при k=10 $(2^{n_1}-2)\cdot(2^{n_2}-2)\cdot\ldots\cdot(2^{n_{10}}-2)$.

Определим многочлены $\sigma_k(x_1,\ldots,x_{10})=\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le 10}x_{i_1},\ldots,x_{i_{10}}$.

Тогда искомое число равно $N=\sigma_0(2^{n_1}-1,\ldots,2^{n_{10}}-1)+\sigma_2(2^{n_1}-1,\ldots,2^{n_{10}}-1)+\cdots+\sigma_{10}(2^{n_1}-1,\ldots,2^{n_{10}}-1)$.

Заметим, что

$$\sigma_0(x_1,\ldots,x_{10})+\sigma_1(x_1,\ldots,x_{10})+\cdots+\sigma_{10}(x_1,\ldots,x_{10})=(x_1+1)\cdot\ldots\cdot(x_{10}+1);$$

$$\sigma_0(-x_1,\ldots,-x_{10})+\sigma_1(-x_1,\ldots,-x_{10})+\cdots+\sigma_{10}(-x_1,\ldots,-x_{10})=(-x_1+1)\cdot\ldots\cdot(-x_{10}+1);$$

$$\sigma_0(x_1,\ldots,x_{10})+\sigma_1(x_1,\ldots,x_{10})+\cdots+\sigma_{10}(x_1,\ldots,x_{10})+$$
$$+\sigma_0(-x_1,\ldots,-x_{10})+\sigma_1(-x_1,\ldots,-x_{10})+\cdots+\sigma_{10}(-x_1,\ldots,-x_{10})$$
$$=2(\sigma_0(x_1,\ldots,x_{10})+\sigma_2(x_1,\ldots,x_{10})+\cdots+\sigma_{10}(x_1,\ldots,x_{10})).$$

Отсюда получим $\sigma_0(x_1,\ldots,x_{10})+\sigma_2(x_1,\ldots,x_{10})+\cdots+\sigma_{10}(x_1,\ldots,x_{10})=\frac{1}{2}((x_1+1)\cdot\ldots\cdot(x_{10}+1)+(-x_1+1)\cdot\ldots\cdot(-x_{10}+1))$.

Следовательно,

$$N=\frac{1}{2}\cdot 2^{n_1}\cdot\ldots 2^{n_{10}}+(-2^{n_1}+1+1)\cdot\ldots\cdot(-2^{n_{10}}+1+1)=2^{n-1}+\frac{1}{2}\cdot(2^{n_1}-2)\cdot\ldots\cdot(2^{n_{10}}-2).$$