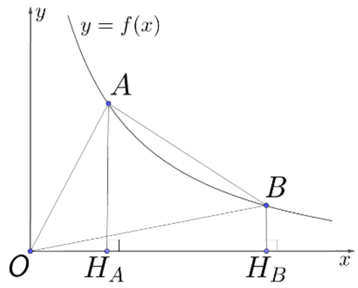
11 КЛАСС

1. Функция $y = f(x)$ определена на множестве $(0, +\infty)$ и принимает на нем положительные значения. Известно, что для любых точек A и B на графике функции площади треугольника AOB и трапеции ABH_BH_A равны между собой (H_A, H_B — основания перпендикуляров, опущенных из точек A и B на ось абсцисс; O – начало координат). Найдите все такие функции. При условии $f(1) = 4$ запишите в ответ число $f(4)$.



Решение:
Пусть M – точка пересечения отрезков OB и AH_A. Так как площади треугольника AOB и трапеции ABH_BH_A равны между собой, то площади треугольников AMO и трапеции MBH_BH_A также равны между собой. Отсюда следует, что равны и площади треугольников AOH_A и трапеции BOH_B. Пусть абсциссы точек H_A и H_B равны x и t соответственно. Тогда имеем равенство $x \cdot f(x) = t \cdot f(t)$. При фиксированном t получаем вывод: $f(x) = \frac{c}{x}, c > 0$.

Ответ: 1

2. Пусть x_1 и x_2 - наибольшие корни многочленов

$$f(x) = 1 - x - 4x^2 + x^4$$
и
$$g(x) = 16 - 8x - 16x^2 + x^4$$

соответственно. Найдите $\frac{x_2}{x_1}$.

Решение:
Заметим, что $f(-2) > 0, f(-1) < 0, f(0) > 0, f(1) < 0, f(3) > 0$. Следовательно, многочлен $f(x)$ имеет 4 действительных корня. Аналогично, из неравенств $g(-4) > 0, g(-2) < 0, g(0) > 0, g(2) < 0, g(5) > 0$ следует, что многочлен $g(x)$ имеет 4 действительных корня.
Сравнение коэффициентов многочленов

$$f(x) = 1 - x - 4x^2 + x^4 \text{ и } g(x) = 16 - 8x - 16x^2 + x^4$$

показывает, что в соответствии с формулами Виета корни многочлена $g(x)$ являются удвоенными корнями многочлена $f(x)$. Отсюда вытекает, что $\frac{x_2}{x_1} = 2$.

Ответ: 2.

3. Вычислите с точностью до одной десятой значение выражения $\sqrt{86 + 41\sqrt{86 + 41\sqrt{86 + \ldots}}}$

Решение:
Рассмотрим строго возрастающую последовательность значений:

$$\sqrt{86}, \sqrt{86 + 41\sqrt{86}}, \sqrt{86 + 41\sqrt{86 + 41\sqrt{86}}}, \ldots$$

Если эта последовательность ограничена сверху, то значением F является точная верхняя граница, и тогда F – действительное число. Таким образом, достаточно доказать ограниченность указанной последовательности. Докажем, что эта последовательность сверху ограничена числом 43. Действительно,

$\sqrt{86} < 43, \Rightarrow 41\sqrt{86} < 41 \cdot 43 \Rightarrow 86 + 41\sqrt{86} < 86 + 41 \cdot 43 = 43^2 \Rightarrow \sqrt{86 + 41\sqrt{86}} < 43$ и т. д.

Очевидно, из условия, что F является положительным корнем уравнения $F^2 = 86 + 41F$. Отсюда находим $F = 43$.

Ответ: 43.

4. Известно, что число $\cos 6^0$ является корнем уравнения $32t^5 - 40t^3 + 10t - \sqrt{3} = 0$. Найдите остальные четыре корня этого уравнения. (Ответы в задаче должны быть компактными выражениями, не содержащими знаков суммирования, многоточий и радикалов.)

Решение:

$\cos 5x = 16cos^5 x - 20cos^3 x + 5cosx$. Тогда остальными корнями уравнения будут числа $\cos 66^0$, $\cos 78^0$, $\cos 138^0$, $\cos 150^0$.

Ответ: $\cos 66^0$, $\cos 78^0$, $\cos 138^0$, $\cos 150^0$

5. Найти площадь геометрической фигуры, координаты вершин которой являются решениями системы уравнений

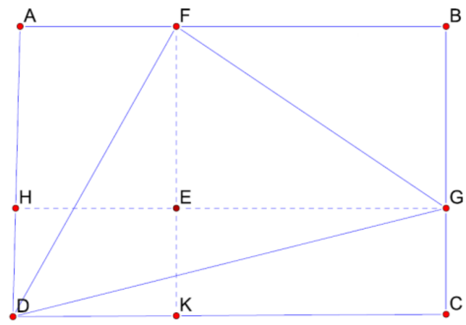
$$\begin{cases} x^4 + \frac{7}{2}x^2 y + 2y^3 = 0 \\ 4x^2 + 7xy + 2y^3 = 0 \end{cases}.$$

Решение:

Система уравнений и имеет всего три действительных решения: $(0; 0), (2; -1), \left(-\frac{11}{2}; -\frac{11}{2}\right)$. Площадь треугольника, вершины которого имеют такие координаты, равна $16\frac{1}{2}$.

Ответ: $16\frac{1}{2}$

6. На сторонах AB и BC прямоугольника $ABCD$ выбраны точки F и G соответственно. На сторону CD из точки F опущен перпендикуляр FK. На сторону AD из точки G опущен перпендикуляр GH. Точка пересечение FK и GH обозначена через E. Найдите площадь треугольника DFG, если известно, что площади прямоугольников $ABCD$ и $HEKD$ равны 20 и 8 соответственно.



Решение:

Пусть *AD* = *a*, *DC* = *b*, *HD* = *x*, а *DK* = *y*.

$$S_{DFG} = S_{ABCD} - S_{AFD} - S_{FGB} - S_{DGC} = ab - \frac{1}{2}ay - \frac{1}{2}(b-y)(a-x) - \frac{1}{2}bx$$
$$= ab - \frac{1}{2}ay - \frac{1}{2}ay(ab - bx - ay + xy) - \frac{1}{2}bx$$
$$= ab - \frac{1}{2}ay - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}bx + \frac{1}{2}ay - \frac{1}{2}xy - \frac{1}{2}bx = \frac{ab - xy}{2} = \frac{S_{ABCD} - S_{HEKD}}{2} = 6$$

Ответ: 6