10 КЛАСС

1. У Олега есть 550 рублей, и он хочет подарить маме на 8 Марта тюльпаны, причем непременно их должно быть нечётное число, и ни один оттенок цвета не должен повторяться. В магазине, куда пришел Олег, один тюльпан стоит 49 рублей, и есть в наличии цветы одиннадцати оттенков. Сколько существует способов у Олега подарить маме цветы? (Ответ в задаче должен быть компактным выражением, не содержащим знаков суммирования, многоточий и т.п.)

Решение:

1 способ

Используя свойство биномиальных коэффициентов

$$C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \cdots = 2^{n-1},$$

а также учитывая их комбинаторный смысл, получим, что число способов сформировать букет из нечетного количества цветов не более 11-ти оттенков (при условии, что ни один оттенок не должен повторяться) равно:

$$C_{11}^1 + C_{11}^3 + C_{11}^5 + \cdots + C_{11}^{11} = 2^{10} = 1024.$$

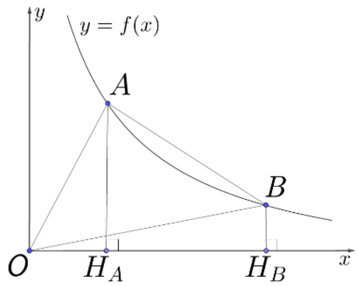
2 способ

Рассмотрим 10 цветов 10 различных оттенков. Собрать букет из этих цветов без учёта чётности можно 2^{10} способами. Если в букете нечётное количество цветов, то мы его оставляем, если же чётное – добавляем неиспользованный одиннадцатый цветок. Таким образом, общее количество способов собрать букет равно 2^{10}.

Ответ: 1024.

2. Функция $y = f(x)$ определена на множестве $(0, +\infty)$ и принимает на нем положительные значения. Известно, что для любых точек A и B на графике функции площади треугольника AOB и трапеции ABH_BH_A равны между собой (H_A, H_B — основания перпендикуляров, опущенных из точек A и B на ось абсцисс; O – начало координат). Найдите все такие функции.

При условии $f(1) = 4$ запишите в ответ число $f(4)$.



Решение:

Пусть M – точка пересечения отрезков OB и AH_A. Так как площади треугольника AOB и трапеции ABH_BH_A равны между собой, то площади треугольников AMO и трапеции MBH_BH_A также равны между собой. Отсюда следует, что равны и площади треугольников AOH_A и BOH_B. Пусть абсциссы точек H_A и H_B равны x и t соответственно. Тогда имеем равенство $x \cdot f(x) = t \cdot f(t)$. При фиксированном t получаем вывод: $f(x) = \frac{c}{x}, c > 0$.

Ответ: 1

3. Пусть x_1 и x_2 - наибольшие корни многочленов $f(x) = 1 - x - 4x^2 + x^4$ и $g(x) = 16 - 8x - 16x^2 + x^4$ соответственно. Найдите $\frac{x_2}{x_1}$.

Решение:

Заметим, что $f(-2) > 0, f(-1) < 0, f(0) > 0, f(1) < 0, f(3) > 0$. Следовательно, многочлен $f(x)$ имеет 4 действительных корня. Аналогично, из неравенств $g(-4) > 0, g(-2) < 0, g(0) > 0, g(2) < 0, g(5) > 0$ следует, что многочлен $g(x)$ имеет 4 действительных корня.

Сравнение коэффициентов многочленов

$$f(x) = 1 - x - 4x^2 + x^4 \text{ и } g(x) = 16 - 8x - 16x^2 + x^4$$

показывает, что в соответствии с формулами Виета корни многочлена $g(x)$ являются удвоенными корнями многочлена $f(x)$. Отсюда вытекает, что $\frac{x_2}{x_1} = 2$.

Ответ: 2.

4. Вычислите с точностью до одной десятой значение выражения $\sqrt{86+41\sqrt{86+41\sqrt{86+\ldots}}}$

Решение:

Рассмотрим строго возрастающую последовательность значений:

$$\sqrt{86}, \sqrt{86+41\sqrt{86}}, \sqrt{86+41\sqrt{86+41\sqrt{86}}}, \ldots$$

Если эта последовательность ограничена сверху, то значением F является точная верхняя граница, и тогда F – действительное число. Таким образом, достаточно доказать ограниченность указанной последовательности. Докажем, что эта последовательность сверху ограничена числом 43. Действительно,

$$\sqrt{86} < 43, \Rightarrow 41\sqrt{86} < 41\cdot 43 \Rightarrow 86+41\sqrt{86} < 86+41\cdot 43 = 43^2 \Rightarrow \Rightarrow \sqrt{86+41\sqrt{86}} < 43 \text{ и т. д.}$$

Очевидно из условия, что F является положительным корнем уравнения $F^2 = 86 + 41F$. Отсюда находим $F = 43$.

Ответ: 43.

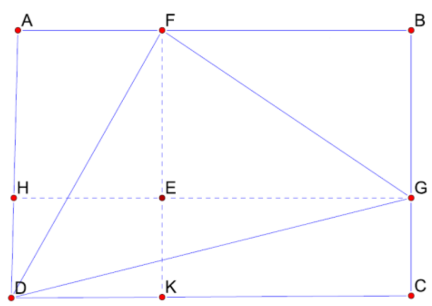
5. Известно, что число $\cos 6^0$ является корнем уравнения $32t^5 - 40t^3 + 10t - \sqrt{3} = 0$. Найдите остальные четыре корня этого уравнения. (Ответы в задаче должны быть компактными выражениями, не содержащими знаков суммирования, многоточий и радикалов.)

Решение:

$\cos 5x = 16cos^5x - 20cos^3x + 5cosx$. Тогда остальными корнями уравнения будут числа $\cos 66^0$, $\cos 78^0$, $\cos 138^0$, $\cos 150^0$.

Ответ: $\cos 66^0$, $\cos 78^0$, $\cos 138^0$, $\cos 150^0$

6. На сторонах AB и BC прямоугольника $ABCD$ выбраны точки F и G соответственно. На сторону CD из точки F опущен перпендикуляр FK. На сторону AD из точки G опущен перпендикуляр GH. Точка пересечение FK и GH обозначена через E. Найдите площадь треугольника DFG, если известно, что площади прямоугольников $ABCD$ и $HEKD$ равны 20 и 8 соответственно.



Решение:

Пусть $AD = a$, $DC = b$, $HD = x$, а $DK = y$.

$$S_{DFG} = S_{ABCD} - S_{AFD} - S_{FGB} - S_{DGC} = ab - \frac{1}{2}ay - \frac{1}{2}(b-y)(a-x) - \frac{1}{2}bx$$
$$= ab - \frac{1}{2}ay - \frac{1}{2}ay(ab - bx - ay + xy) - \frac{1}{2}bx$$
$$= ab - \frac{1}{2}ay - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}bx + \frac{1}{2}ay - \frac{1}{2}xy - \frac{1}{2}bx = \frac{ab - xy}{2} = \frac{S_{ABCD} - S_{HEKD}}{2} = 6$$

Ответ: 6