10 КЛАСС

1. Решите уравнение $2^x + 2^y = 2^{xy-1}$ в целых числах.

2. Рассмотрим всевозможные 100-значные натуральные числа, в десятичной записи которых встречаются только цифры 1,2,3. Сколько среди них делятся на 3 нацело?

3. Решите уравнение $\sin^3 x + 6\cos^3 x + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2x \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$.

4. Восемь чисел a_1, a_2, a_3, a_4 и b_1, b_2, b_3, b_4 удовлетворяют соотношениям

$$\begin{cases} a_1b_1 + a_2b_3 = 1 \\ a_1b_2 + a_2b_4 = 0 \\ a_3b_1 + a_4b_3 = 0 \\ a_3b_2 + a_4b_4 = 1. \end{cases}$$

Известно, что $a_2b_3 = 7$. Найдите a_4b_4.

5. На декартовой плоскости рассмотрим окружность радиуса R с центром в начале координат. Укажите хотя бы одно значение R, при котором на такой окружности лежат ровно 32 целочисленные точки (точку называют *целочисленной*, если ее абсцисса и ордината – целые числа).

Указание. *Натуральное число x представимо в виде суммы квадратов двух целых чисел тогда и только тогда, когда все простые числа (кроме 2), входящие в разложение числа x в нечетной степени, имеют вид $4k + 1$ для некоторых целых k. В частности, в виде суммы двух квадратов представимо любое простое число, дающее остаток 1 при делении на 4. Если каждое из чисел a и b представимо в виде суммы двух квадратов, то это же верно и для их произведения.*

6. В вершинах квадрата со стороной 4 расположены четыре города. Эти города надо соединить дорогами так, чтобы из любого города можно было по ним добраться в любой. Предложите хоть один вариант таких дорог, общей длиной *менее* 11.

Указание. При решении задачи может оказаться полезным следующее утверждение (которое допустимо использовать без доказательства). *Пусть внутренние углы треугольника ABC меньше 120^0. Сумма расстояний $AT + BT + CT$ от точки T до вершин треугольника минимальна, если из точки T стороны треугольника видны под углом 120^0 (T – точка Торичелли треугольника). Если же один из углов треугольника больше или равен 120^0, то точкой минимума суммы расстояний будет вершина этого угла.*

7. Найдите площадь треугольника ABC, вершины которого имеют координаты $A(0,0), B(1424233, 2848467), C(1424234, 2848469)$. Ответ округлите до сотых.

8. В остроугольном треугольнике ABC на стороне AC выбрана точка Q так, что $AQ:QC = 1:2$.

Из точки Q опущены перпендикуляры QM и QK на стороны AB и BC соответственно. При этом $BM:MA = 4:1, BK = KC$. Найдите $MK:AC$.