9 КЛАСС

1. У Олега есть 550 рублей, и он хочет подарить маме на 8 Марта тюльпаны, причем непременно их должно быть нечётное число, и ни один оттенок цвета не должен повторяться. В магазине, куда пришел Олег, один тюльпан стоит 49 рублей, и есть в наличии цветы одиннадцати оттенков. Сколько существует способов у Олега подарить маме цветы? (Ответ в задаче должен быть компактным выражением, не содержащим знаков суммирования, многоточий и т.п.)

Решение. Из условия очевидно, что максимальное количество цветов в букете – 11.

1 способ

Используя свойство биномиальных коэффициентов

$$C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \cdots = 2^{n-1},$$

а также учитывая их комбинаторный смысл, получим, что число способов сформировать букет из нечетного количества цветов не более 11-ти оттенков (при условии, что ни один оттенок не должен повторяться) равно:

$$C_{11}^1 + C_{11}^3 + C_{11}^5 + \cdots + C_{11}^{11} = 2^{10} = 1024.$$

2 способ

Рассмотрим 10 цветов 10 различных оттенков. Собрать букет из этих цветов без учёта чётности можно 2^{10} способами. Если в букете нечётное количество цветов, то мы его оставляем, если же чётное – добавляем неиспользованный одиннадцатый цветок. Таким образом, общее количество способов собрать букет равно 2^{10}.

Ответ: 1024.

2. Отличные от нуля числа a и b являются корнями квадратного уравнения $x^2 - 5px + 2p^3 = 0$. Уравнение $x^2 - ax + b = 0$ имеет единственный корень. Найдите p. Решение обоснуйте.

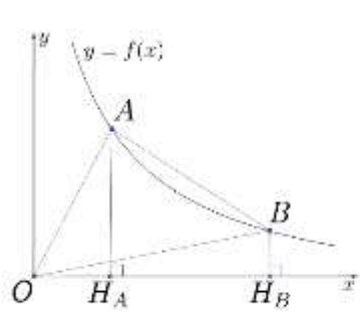
Решение. Так как уравнение $x^2 - ax + b = 0$ имеет единственный корень, то $b = \frac{a^2}{4}$. По теореме Виета имеем равенства: $a + b = 5p; ab = 2p^3$. Подставляя $b = \frac{a^2}{4}$ в последнее равенство, получим: $a = 2p$. Учитывая, что a и b отличны от нуля, найдём $p = 3$.

Ответ: 3.

3. Придумайте какую-нибудь систему из двух уравнений с двумя неизвестными x и y, чтобы ее решениями были *только* следующие три пары чисел: $x = y = 1, x = y = 2$ и $x = 3, y = 4$. В записи уравнений системы, помимо чисел и собственно неизвестных x и y, разрешается использовать скобки, знак =, стандартные арифметические операции и элементарные функции.

Решение. Например, $\begin{cases} (x-1)(x-2)(x-3) = 0 \\ (|x-1| + |y-1|)(|x-2| + |y-2|)(|x-3| + |y-4|) = 0 \end{cases}$.

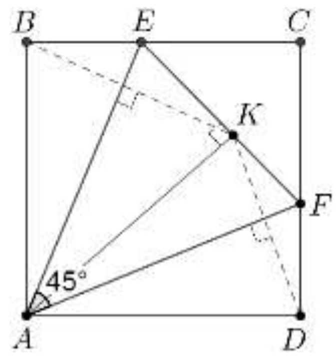
4. Функция $y = f(x)$ определена на множестве $(0, +\infty)$ и принимает на нем положительные значения. Известно, что для любых точек A и B на графике функции площади треугольника AOB и трапеции ABH_BH_A равны между собой (H_A, H_B – основания перпендикуляров, опущенных из точек A и B на ось абсцисс; O – начало координат). Найдите все такие функции. Решение обоснуйте.



Решение. Пусть M – точка пересечения отрезков OB и AH_A. Так как площади треугольника AOB и трапеции ABH_BH_A равны между собой, то площади треугольников AMO и трапеции MBH_BH_A также равны между собой. Отсюда следует, что равны и площади треугольников AOH_A и трапеции BOH_B. Пусть абсциссы точек H_A и H_B равны x и t соответственно. Тогда имеем равенство $x \cdot f(x) = t \cdot f(t)$. При фиксированном t получаем вывод: $f(x) = \frac{c}{x}, c > 0$.

Ответ: $f(x) = \frac{c}{x}, c > 0$**.**

5. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ выбраны точки E и F таким образом, что угол EAF равен 45^0. Длина стороны квадрата равна 1. Найдите периметр треугольника CEF. Решение обоснуйте.



Решение. Если отразить точку D относительно прямой AF, а затем относительно прямой AE, то она перейдет в точку B. Действительно, композиция двух осевых симметрий относительно пересекающихся прямых – это поворот на удвоенный угол между прямыми. То есть в нашем случае эти две симметрии эквивалентны повороту на угол 90^0 относительно точки A.

Это означает, что образ точки D при симметрии относительно AF и образ точки B при симметрии относительно AE – это одна и та же точка; на рисунке она обозначена K. Из точки K отрезки AE и AF видны под углом 90^0 (при симметрии сохраняются величины углов, поэтому, например, углы ABE и AKE равны). Значит точка K – это основание перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую EF.

И, наконец, поскольку $BE = EK$ и $DF = FK$ (при симметрии длины отрезков сохраняются), видим, что периметр треугольника CEF равен сумме длин сторон BC и CD квадрата.

Ответ: 2.

6. Пусть x_1 и x_2 – наибольшие корни многочленов $f(x) = 1 - x - 4x^2 + x^4$ и $g(x) = 16 - 8x - 16x^2 + x^4$ соответственно. Найдите $\frac{x_1}{x_2}$. Решение обоснуйте.

Решение.

1 способ

Заметим, что $g(2x) = 16f(x)$. Тогда x_1 – корень $f(x)$ тогда и только тогда, когда $2x_1$ – корень $g(x)$. Следовательно, $\frac{x_1}{x_2} = \frac{1}{2}$.

2 способ

Сравнение коэффициентов многочленов

$$f(x) = 1 - x - 4x^2 + x^4 \text{ и } g(x) = 16 - 8x - 16x^2 + x^4$$

показывает, что в соответствии с формулами Виета корни многочлена $g(x)$ являются удвоенными корнями многочлена $f(x)$. Отсюда вытекает, что $\frac{x_1}{x_2} = \frac{1}{2}$.

Ответ: 0,5.

7. Вычислите с точностью до одной десятой значение выражения $\sqrt{86 + 41\sqrt{86 + 41\sqrt{86 + \ldots}}}$

Решение. Рассмотрим строго возрастающую последовательность значений:

$$\sqrt{86}, \sqrt{86 + 41\sqrt{86}}, \sqrt{86 + 41\sqrt{86 + 41\sqrt{86}}}, \ldots$$

Если эта последовательность ограничена сверху, то значением F является точная верхняя граница, и тогда F – действительное число. Таким образом, достаточно доказать ограниченность указанной последовательности. Докажем, что эта последовательность сверху ограничена числом 43. Действительно,

$$\sqrt{86} < 43, \Rightarrow 41\sqrt{86} < 41 \cdot 43 \Rightarrow 86 + 41\sqrt{86} < 86 + 41 \cdot 43 = 43^2 \Rightarrow \Rightarrow \sqrt{86 + 41\sqrt{86}} < 43 \text{ и т. д.}$$

Очевидно из условия, что F является положительным корнем уравнения $F^2 = 86 + 41F$. Отсюда находим $F = 43$.

Ответ: 43.

8. Пусть A и B – некоторые числовые множества, а множество $C = \{a + b | a \in A, b \in B\}$ представляет собой их сумму. (Другими словами, множество C состоит из всевозможных сумм элементов множеств A и B. Если, например, $A = \{0,1,2\}, B = \{1,2\}$, то $C = \{1,2,3,4\}$.)
Известно, что $C = \{0,1,2, \dots, 2^{2828}\}$, а максимальный элемент множества A равен

$$\max A = \left(\sqrt{2} - 1\right)^{2020} + \left(\sqrt{2} + 1\right)^{2020}$$

Докажите или опровергните следующие утверждения: 1) множество A и множество B содержат конечное число членов; 2) все элементы множеств A и B – целые числа; 3) $\max B \geq 2$.

Решение. 1) верно: если множество A или множество B бесконечно, то и множество C будет бесконечно. Поэтому можем обозначить через a, b, c максимальные элементы этих множеств соответственно и заметить для решения п.3, что $a + b = c$. Отдельно отметим, что такие множества существуют: например, $A = \{0, \dots, a\}$, $B = \{0, \dots, c - a\}$.

2) верно: через разложение по биному доказывается, что a целое. Тогда если бы B содержало нецелые, то и C содержало бы нецелые. Поэтому все элементы множества B целые. Отсюда аналогично получаем, что все элементы множества A целые.

3) утверждение верно.

Заметим, что $2020 = 5 \cdot 404$, $2828 = 7 \cdot 404$, $a < 1 + a_1$, где

$a_1 = \left((\sqrt{2} + 1)^5\right)^{404} = (41 + 29\sqrt{2})^{404} = (82.0 \dots)^{404} < 127^{404} =$
$= 128^{404}(1 - \frac{1}{128})^{404} < 2^{7 \cdot 404}(1 - \frac{1}{128}) < 2^{2828} - 2.$

Тогда $b = c - a > 2^{2828} - (1 + 2^{2828} - 2) = 1.$