10 КЛАСС

1. У Олега есть 550 рублей, и он хочет подарить маме на 8 Марта тюльпаны, причем непременно их должно быть нечётное число, и ни один оттенок цвета не должен повторяться. В магазине, куда пришел Олег, один тюльпан стоит 49 рублей, и есть в наличии цветы одиннадцати оттенков. Сколько существует способов у Олега подарить маме цветы? (Ответ в задаче должен быть компактным выражением, не содержащим знаков суммирования, многоточий и т.п.)

Решение. Из условия очевидно, что максимальное количество цветов в букете – 11.

1 способ

Используя свойство биномиальных коэффициентов

$$C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \cdots = 2^{n-1},$$

а также учитывая их комбинаторный смысл, получим, что число способов сформировать букет из нечетного количества цветов не более 11-ти оттенков (при условии, что ни один оттенок не должен повторяться) равно:

$$C_{11}^1 + C_{11}^3 + C_{11}^5 + \cdots + C_{11}^{11} = 2^{10} = 1024.$$

2 способ

Рассмотрим 10 цветов 10 различных оттенков. Собрать букет из этих цветов без учёта чётности можно 2^{10} способами. Если в букете нечётное количество цветов, то мы его оставляем, если же чётное – добавляем неиспользованный одиннадцатый цветок. Таким образом, общее количество способов собрать букет равно 2^{10}.

Ответ: 1024.

2. Отличные от нуля числа a и b являются корнями квадратного уравнения $x^2 - 5px + 2p^3 = 0$. Уравнение $x^2 - ax + b = 0$ имеет единственный корень. Найдите p.

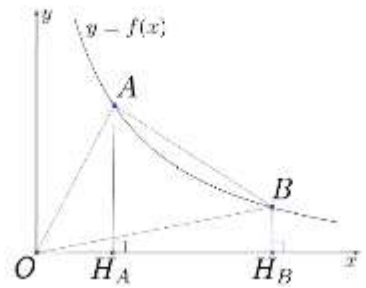
Решение. Так как уравнение $x^2 - ax + b = 0$ имеет единственный корень, то $b = \frac{a^2}{4}$. По теореме Виета имеем равенства: $a + b = 5p; ab = 2p^3$. Подставляя $b = \frac{a^2}{4}$ в последнее равенство, получим: $a = 2p$. Учитывая, что a и b отличны от нуля, найдём $p = 3$.

Ответ: 3.

3. Придумайте какую-нибудь систему из двух уравнений с двумя неизвестными x и y, чтобы ее решениями были *только* следующие три пары чисел: $x = y = 1, x = y = 2$ и $x = 3, y = 4$. В записи уравнений системы, помимо чисел и собственно неизвестных x и y, разрешается использовать скобки, знак =, стандартные арифметические операции и элементарные функции

Решение. Например, $\begin{cases} (x-1)(x-2)(x-3) = 0 \\ (|x-1| + |y-1|)(|x-2| + |y-2|)(|x-3| + |y-4|) = 0 \end{cases}$.

4. Функция $y = f(x)$ определена на множестве $(0, +\infty)$ и принимает на нем положительные значения. Известно, что для любых точек A и B на графике функции площади треугольника AOB и трапеции ABH_BH_A равны между собой (H_A, H_B — основания перпендикуляров, опущенных из точек A и B на ось абсцисс;

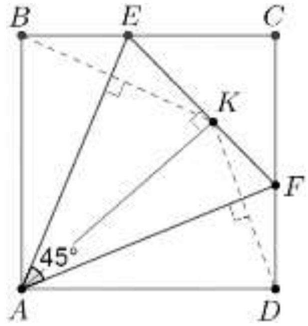


O – начало координат). Найдите все такие функции. Решение обоснуйте. При условии $f(1) = 4$ запишите в ответ число $f(2)$.

Решение. Пусть M – точка пересечения отрезков OB и AH_A. Так как площади треугольника AOB и трапеции ABH_BH_A равны между собой, то площади треугольников AMO и трапеции MBH_BH_A также равны между собой. Отсюда следует, что равны и площади треугольников AOH_A и трапеции BOH_B. Пусть абсциссы точек H_A и H_B равны x и t соответственно. Тогда имеем равенство $x \cdot f(x) = t \cdot f(t)$. При фиксированном t получаем вывод: $f(x) = \frac{c}{x}, c > 0$.

Ответ: $f(x) = \frac{c}{x}, c > 0$**.**

5. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ выбраны точки E и F таким образом, что угол EAF равен 45^0. Длина стороны квадрата равна 1. Найдите периметр треугольника CEF.



Решение. Если отразить точку D относительно прямой AF, а затем относительно прямой AE, то она перейдет в точку B. Действительно, композиция двух осевых симметрий относительно пересекающихся прямых – это поворот на удвоенный угол между прямыми. То есть в нашем случае эти две симметрии эквивалентны повороту на угол 90^0 относительно точки A.

Это означает, что образ точки D при симметрии относительно AF и образ точки B при симметрии относительно AE – это одна и та же точка; на рисунке она обозначена K. Из точки K отрезки AE и AF видны под углом 90^0 (при симметрии сохраняются величины углов, поэтому, например, углы ABE и AKE равны). Значит точка K – это основание перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую EF.

И, наконец, поскольку $BE = EK$ и $DF = FK$ (при симметрии длины отрезков сохраняются), видим, что периметр треугольника CEF равен сумме длин сторон BC и CD квадрата.

Ответ: 2.

6. Пусть x_1 и x_2 - наибольшие корни многочленов $f(x) = 1 - x - 4x^2 + x^4$ и $g(x) = 16 - 8x - 16x^2 + x^4$ соответственно. Найдите $\frac{x_1}{x_2}$.

Решение.

1 способ

Заметим, что $g(2x) = 16f(x)$. Тогда x_1 – корень $f(x)$ тогда и только тогда, когда $2x_1$ – корень $g(x)$. Следовательно, $\frac{x_1}{x_2} = \frac{1}{2}$.

2 способ

Сравнение коэффициентов многочленов

$$f(x) = 1 - x - 4x^2 + x^4 \text{ и } g(x) = 16 - 8x - 16x^2 + x^4$$

показывает, что в соответствии с формулами Виета корни многочлена $g(x)$ являются удвоенными корнями многочлена $f(x)$. Отсюда вытекает, что $\frac{x_1}{x_2} = \frac{1}{2}$.

Ответ: 0,5.

7. Вычислите с точностью до одной десятой значение выражения $\sqrt{86 + 41\sqrt{86 + 41\sqrt{86 + \ldots}}}$

Решение. Рассмотрим строго возрастающую последовательность значений:

$$\sqrt{86}, \sqrt{86+41\sqrt{86}}, \sqrt{86+41\sqrt{86+41\sqrt{86}}}, \ldots$$

Если эта последовательность ограничена сверху, то значением F является точная верхняя граница, и тогда F – действительное число. Таким образом, достаточно доказать ограниченность указанной последовательности. Докажем, что эта последовательность сверху ограничена числом 43. Действительно,

$$\sqrt{86} < 43, \Rightarrow 41\sqrt{86} < 41 \cdot 43 \Rightarrow 86 + 41\sqrt{86} < 86 + 41 \cdot 43 = 43^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{86+41\sqrt{86}} < 43 \text{ и т. д.}$$

Очевидно из условия, что F является положительным корнем уравнения $F^2 = 86 + 41F$. Отсюда находим $F = 43$.

Ответ: 43.

8. Известно, что число $\cos 6^0$ является корнем уравнения $32t^5 - 40t^3 + 10t - \sqrt{3} = 0$. Найдите остальные четыре корня этого уравнения. (Ответы в задаче должны быть компактными выражениями, не содержащими знаков суммирования, многоточий и т.п.)

Решение: Замена $t = \cos\varphi$. Уравнение примет вид: $32\cos^5\varphi - 40\cos^3\varphi + 10\cos\varphi = \sqrt{3}$. Преобразуем левую часть:

$$2\cos\varphi(16\cos^4\varphi - 20\cos^2\varphi + 5) = [\text{формулы понижения}] =$$
$$= 2\cos\varphi(4(1+\cos 2\varphi)^2 - 10 - 10\cos 2\varphi + 5) =$$
$$= 2\cos\varphi(4\cos^2 2\varphi\ - 2\cos 2\varphi - 1) == 2\cos\varphi(2(1+\cos 4\varphi) - 2\cos 2\varphi - 1)$$
$$== 2\cos\varphi(-4\sin 3\varphi\sin\varphi + 1) = -4\sin 3\varphi\sin 2\varphi + 2\cos\varphi =$$
$$= -2(\cos\varphi - \cos 5\varphi) + 2\cos\varphi = 2\cos 5\varphi.$$

Окончательно, $\cos 5\varphi = \sqrt{3}/2$. Отсюда $\varphi = \pm\frac{\pi}{30} + \frac{2\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z}$. Поскольку у первоначального уравнения ровно пять действительных корней (по условию), то, чтоб их предъявить, достаточно взять какие-нибудь пять значений φ, косинусы которых различны. Например, $\varphi \in \{6^0, 78^0, 150^0, 222^0,\ 294^0\}$.

Ответ: Остальные четыре корня имеют вид $t = \cos\varphi$, где $\varphi \in \{78^0, 150^0, 222^0,\ 294^0\}$.