

10 КЛАСС

1. Действительные числа x, y, z удовлетворяют соотношениям:

$$4x^2 - 2x - 30yz = 25y^2 + 5y + 12xz = 9z^2 - 3z - 20xy.$$

Найдите все возможные тройки чисел (a, b, c) , где $a = 2x + 5y, b = 3z + 5y, c = 3z - 2x$.

2. Найдите все такие функции $f(x)$, которые одновременно удовлетворяют трем условиям:
1) $f(x) > 0$ для любого $x > 0$; 2) $f(1) = 1$; 3) $f(a + b) \cdot (f(a) + f(b)) = 2f(a) \cdot f(b) + a^2 + b^2$ для любых $a, b \in \mathbb{R}$.

3. В четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O . Известно, что $S_{ABO} = S_{CDO} = \frac{3}{2}BC = 3\sqrt{2}$, $\cos \angle ADC = \frac{3}{\sqrt{10}}$. Найдите синус угла между диагоналями этого четырехугольника, если его площадь принимает наименьшее возможное значение при данных условиях.

4. В одной из клеток бесконечной клетчатой бумаги находится робот, которому могут быть отданы следующие команды:

- **вверх** (робот перемещается на соседнюю клетку сверху);
- **вниз** (робот перемещается на соседнюю клетку снизу);
- **влево** (робот перемещается на соседнюю клетку слева);
- **вправо** (робот перемещается на соседнюю клетку справа).

Если, например, робот выполнит последовательность из четырех команд (**вверх, вправо, вниз, влево**), то он, очевидно, вернется в исходное положение, т.е. окажется в той же клетке, из которой начал движение. Сколько существует различных последовательностей из 8 команд, возвращающих робота в исходное положение?

5. Найдите все простые числа, десятичная запись которых имеет вид $101010 \dots 101$ (единицы и нули чередуются).

6. Найдите какие-нибудь целые числа A и B , для которых выполняется неравенство $0,999 < A + B \cdot \sqrt{2} < 1$.

8. Аня с Борей играют в «морской бой» по следующим правилам: на окружности выбираются 29 различных точек, пронумерованных по часовой стрелке натуральными числами от 1 до 29. Аня рисует корабль – произвольный треугольник с вершинами в этих точках. Будем называть «выстрелом» выбор двух различных натуральных чисел k и m от 1 до 29. Если отрезок с концами в точках с номерами k и m имеет с треугольником Ани хотя бы одну общую точку, то корабль считается «раненым». Боря производит «залп» – несколько выстрелов одновременно. Аня нарисовала корабль и показала его Боре. И тут они заметили, что любой «залп» из K различных выстрелов обязательно ранит корабль Ани. Укажите какое-нибудь расположение корабля Ани, при котором значение K будет минимальным.