

ОТБОРОЧНЫЙ ТУР

9 КЛАСС

1. Найдите сумму всех четных натуральных чисел n , у которых число делителей (включая 1 и само n) равно $\frac{n}{2}$. (Например, число 12 имеет 6 делителей: 1,2,3,4,6,12.)

Решение. Пусть каноническое разложение числа n имеет вид: $n = 2^{t_1} \cdot 3^{t_2} \cdot 5^{t_3} \cdot \dots \cdot p^{t_k}$. Тогда количество делителей числа n равно $(t_1 + 1)(t_2 + 1)(t_3 + 1) \dots (t_k + 1)$. Из условия задачи имеем равенство

$$(t_1 + 1)(t_2 + 1)(t_3 + 1) \dots (t_k + 1) = 2^{t_1-1} \cdot 3^{t_2} \cdot 5^{t_3} \cdot \dots \cdot p^{t_k}. (*)$$

Заметим, что $2^{t_1-1} > t_1 + 1$ при $t_1 \geq 4$, $3^{t_2} > t_2 + 1$ при $t_2 \geq 1$, ..., $p^{t_k} > t_k + 1$ при $t_k \geq 1$. Следовательно, t_1 может принимать значения 1, 2 или 3. Подставляя указанные значения в равенство (*), найдём, что $n = 8$ или $n = 12$.

Ответ: 20.

2. Сколькими способами из первых 1000 натуральных чисел 1,2, ...,1000 можно выбрать 4 числа, образующих возрастающую арифметическую прогрессию?

Решение. Найдём формулу для вычисления числа способов из первых n натуральных чисел 1,2, ..., n выбрать 4 числа, образующих возрастающую арифметическую прогрессию. Количество прогрессий с разностью 1 равно $n - 3$ (первый член прогрессии может принимать значения от 1 до $n - 3$ включительно), количество прогрессий с разностью 2 равно $n - 6$, ..., количество прогрессий с разностью d равно $n - 3d$. Разность d удовлетворяет неравенству $1 + 3d \leq n$ (если первый член прогрессии равен 1, то её четвертый член, $1 + 3d$, не превосходит n). Поэтому наибольшее значение разности равно $d_{max} = \left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor$ (квадратные скобки обозначают целую часть числа). Следовательно, количество прогрессий, удовлетворяющих условию задачи, равно:

$$(n - 3) + (n - 6) + \dots + (n - 3k) = \frac{(2n - 3k - 3)k}{2}, \text{ где } k = d_{max}.$$

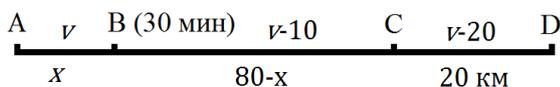
При $n = 1000$ имеем $k = 333$ и число способов равно 166167

Ответ: 166167.

3. Из пункта А в пункт D, расстояние между которыми равно 100 км, выехал автомобилист. Дорога из А в D проходит через пункты В и С. В пункте В навигатор показал, что ехать осталось 30 мин, и автомобилист тут же снизил скорость на 10 км/ч. В пункте С навигатор показал, что ехать осталось 20 км, и автомобилист сразу же второй раз снизил скорость на те же 10 км/ч. (Навигатор определяет оставшееся время на основании текущей скорости движения.) Определите первоначальную скорость автомобиля, если известно, что на путь из В в С он потратил на 5 мин больше времени, чем на путь из С в D.

Решение. По условию, расстояние от С до D равно 20 км. Обозначим расстояние от А до В через x (км), тогда расстояние от В до С составит $(80 - x)$ км.

Пусть $v \frac{\text{км}}{\text{ч}}$ – первоначальная скорость автомобиля. Тогда на участках ВС и CD она равна $(v -$



$10) \frac{\text{км}}{\text{ч}}$ и $(v - 20) \frac{\text{км}}{\text{ч}}$, соответственно. По условию, путь от В до D занял бы полчаса, если бы автомобиль продолжал двигаться со скоростью $v \frac{\text{км}}{\text{ч}}$, то есть

$$100 - x = \frac{v}{2}. \quad (1)$$

**Межрегиональная олимпиада школьников на базе ведомственных образовательных организаций
по математике**

Далее, на путь из В в С он потратил на 5 мин больше времени, чем на путь из С в D:

$$\frac{80-x}{v-10} - \frac{20}{v-20} = \frac{1}{12}. \quad (2)$$

Выразив x из первого уравнения и подставив во второе, получим уравнение для определения v :

$$\frac{\frac{v}{2} - 20}{v - 10} - \frac{20}{v - 20} = \frac{1}{12},$$

которое имеет корни 14 и 100. Корень 14, очевидно, посторонний, так как $v > 20$.

Ответ: $100 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

4. Известно, что существует натуральное число N такое, что

$$(\sqrt{3} - 1)^N = 4817152 - 2781184 \cdot \sqrt{3}. \text{ Найдите } N.$$

Решение. Предположим, что, возведя число $a + b\sqrt{3}$ в степень N , мы получили число $A + B\sqrt{3}$ (здесь a, b, A, B – целые). Раскрыв скобки в выражении $(a + b\sqrt{3})^N$, получим сумму одночленов (с несущественными (для нас сейчас) целыми коэффициентами) вида $a^{N-n}(b\sqrt{3})^n$. Вклад в коэффициент B дадут те одночлены, у которых показатель n нечетен. Поэтому, если $(a + b\sqrt{3})^N = A + B\sqrt{3}$, то $(a - b\sqrt{3})^N = A - B\sqrt{3}$. Перемножив равенства $(\sqrt{3} - 1)^N = 4817152 - 2781184 \cdot \sqrt{3}$ и $(-\sqrt{3} - 1)^N = 4817152 + 2781184 \cdot \sqrt{3}$, получим $(-2)^N = 4817152^2 - 3 \cdot 2781184^2$. Показатель N найдем, деля обе части последовательно на 2 (можно, например сразу поделить каждое слагаемое справа на 256).

Ответ: $N = 16$.

5. В треугольнике ABC стороны $AB = 4, BC = 6$. Точка M лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB , при этом прямые AM и AC перпендикулярны. Найти MA , если радиус описанной вокруг треугольника ABC окружности равен 9.

Решение. Введём систему координат с началом в точке A так, чтобы точка C лежала на оси абсцисс. Из условия задачи точка M лежит на оси ординат. Введём для неизвестных координат обозначения: $A(0,0), B(x_B, y_B), C(x_C, 0), M(0, y_M)$. Обозначим через N середину AB и через O центр описанной окружности, тогда $N(\frac{x_B}{2}, \frac{y_B}{2})$ и $O(\frac{x_C}{2}, y_O)$. Из перпендикулярности векторов \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{MN} следует, что $x_B \frac{x_B}{2} + y_B (y_M - \frac{y_B}{2}) = 0$. Откуда, учитывая $AB^2 = x_B^2 + y_B^2 = 16$, получаем $y_M = \frac{8}{y_B}$. Из перпендикулярности векторов \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{MO} следует, что $x_B \frac{x_C}{2} + y_B (y_M - y_O) = 0$. Кроме этого $BC^2 = (x_B - x_C)^2 + y_B^2 = 36$ и $AO^2 = (\frac{x_C}{2})^2 + y_O^2 = 81$. Этих уравнений достаточно, чтобы получить $MA = |y_M| = 6$.

Ответ: 6.