

## 9 КЛАСС

1. В одной из клеток бесконечной клетчатой бумаги находится робот, которому могут быть отданы следующие команды:

- **вверх** (робот перемещается на соседнюю клетку сверху);
- **вниз** (робот перемещается на соседнюю клетку снизу);
- **влево** (робот перемещается на соседнюю клетку слева);
- **вправо** (робот перемещается на соседнюю клетку справа).

Если, например, робот выполнит последовательность из четырех команд (**вверх, вправо, вниз, влево**), то он, очевидно, вернется в исходное положение, т.е. окажется в той же клетке, из которой начал движение. Сколько существует всего различных последовательностей из 4 команд, возвращающих робота в исходное положение?

**Решение.** Для краткости команду **влево** будем обозначать **Л**, **вправо** – **П**, **вверх** – **В**, **вниз** – **Н**. Чтобы робот вернулся в исходное положение необходимо и достаточно, чтобы ему было отдано команд **Л** столько же, сколько и команд **П**, а команд **В** – столько же, сколько и **Н**. Пусть  $k$  – количество команд **Л** в последовательности. Подсчитаем количество  $N_k$  искомым последовательностей для  $k$  от 0 до 2.

- $k = 0$ . Последовательность состоит только из команд **В** и **Н**. Так как их поровну, то на 2 местах из 4 должна быть команда **В**, а на оставшихся двух – **Н**. Выбрать 2 места из 4 можно  $C_4^2$  способами. Следовательно,  $N_0 = C_4^2 = 6$ ;

- $k = 1$ . Каждая из команд **Л**, **П**, **В**, **Н** встречается в последовательности ровно 1 раз. Число перестановок из 4 элементов равно  $4!$ . Поэтому  $N_1 = 4! = 24$ ;

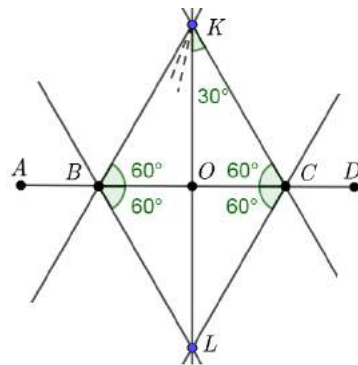
- $k = 2$ . Здесь две **Л**, две **П** и нет команд **В** и **Н**. Две команды **Л** можно разместить  $C_4^2$  способами. Значит  $N_2 = C_4^2 = 6$ .

Таким образом, искомое число последовательностей равно  $N_0 + N_1 + N_2 = 36$ .

**Ответ:** 36.

2. Имеются карандаш, линейка, а также некоторое *специальное устройство*, которое для любого изображенного на плоскости угла строит два луча, делящие этот угол на три равных угла. С помощью этих инструментов постройте на плоскости угол величиной  $10^\circ$ . (Напомним, что карандашом можно отметить точку плоскости, в частности, точку пересечения двух прямых. Линейка лишь позволяет провести прямую через две отмеченные точки, и никаких «параллельных или перпендикулярных краев» у неё нет.)

**Решение.** На прямой, проведенной через две различные точки  $A$  и  $D$ , отметим точки  $B$  и  $C$  как на рисунке. Разделим развернутые углы  $ABC$  и  $DCB$  (которые следует представлять себе отложенными сначала в верхнюю, а затем и в нижнюю полуплоскость относительно прямой  $AD$ ) на три равные части. Получим в результате прямые, образующие угол  $60^\circ$  с прямой  $AD$  и пересекающиеся в точках  $K$  и  $L$ . Пусть  $O$  – точка пересечения  $AD$  и  $KL$ . Угол  $BKO$  равен, очевидно,  $30^\circ$ . Разделив его на три части, получим требуемый угол.



Построение выполнено.

3. Действительные числа  $x, y, z$  удовлетворяют соотношениям:

$$4x^2 - 2x - 30yz = 25y^2 + 5y + 12xz = 9z^2 - 3z - 20xy.$$

Найдите все возможные тройки чисел  $(a, b, c)$ , где  $a = 2x + 5y, b = 3z + 5y, c = 3z - 2x$ .

**Решение.** Заметим, что

$$a - b + c = 0. \tag{1}$$

Обозначим  $A = 4x^2 - 2x - 30yz$ ,  $B = 25y^2 + 5y + 12xz$  и  $C = 9z^2 - 3z - 20xy$ . Вычитая друг из друга эти равенства, получим:

$$\begin{aligned} A - B &= a \cdot (2x - 6z - 5y - 1) = 0, \\ B - C &= b \cdot (5y + 4x - 3z + 1) = 0, \\ A - C &= c \cdot (1 - 2x - 10y - 3z) = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Предположим, что все три числа  $a, b, c$  отличны от нуля. Тогда  $2x - 6z - 5y - 1 = 0$ ,  $5y + 4x - 3z + 1 = 0$  и  $1 - 2x - 10y - 3z = 0$ , что невозможно, так как, сложив 2-е равенство с 3-им и вычтя 1-е, получим  $3 = 0$ . Значит, хотя бы одно из чисел  $a, b, c$  равно нулю. Рассмотрим возможные случаи:

1) Все три числа  $a, b, c$  равны нулю. Тройка  $a = b = c = 0$  очевидно удовлетворяет условиям задачи (достаточно взять  $x = y = z = 0$ ).

2) Среди чисел  $a, b, c$  только два равны нулю. Это невозможно: если два числа равны нулю, то, согласно (1), равно нулю и третье.

3) Только одно из чисел  $a, b, c$  равно нулю.

- $a = 0$ . Тогда  $x = -\frac{5y}{2}$ . Из системы (2) находим  $b = c = 1$ ;

- $b = 0$ . Тогда  $a = -c = 1$ ;

- $c = 0$ . Тогда  $a = b = -1$ .

**Ответ:**  $(0,0,0)$ ,  $(0,1,1)$ ,  $(1,0,-1)$ ,  $(-1,-1,0)$ .

4. Найдите все такие функции  $f(x)$ , которые одновременно удовлетворяют трем условиям: 1)  $f(x) > 0$  для любого  $x > 0$ ; 2)  $f(1) = 1$ ; 3)  $f(a+b) \cdot (f(a) + f(b)) = 2f(a) \cdot f(b) + a^2 + b^2$  для любых  $a, b \in \mathbb{R}$ .

**Решение.** В тождестве из условия задачи

$$f(a+b) \cdot (f(a) + f(b)) = 2f(a) \cdot f(b) + a^2 + b^2 \tag{1}$$

положим  $a = 1, b = 0$ . Тогда  $f(1) \cdot (f(1) + f(0)) = 2f(1) \cdot f(0) + 1$ . Поскольку  $f(1) = 1$ , находим

$$f(0) = 0. \tag{2}$$

Положив затем  $b = -a$  в (1), получим, с учетом (2), что

$$f(a) \cdot f(-a) = -a^2. \tag{3}$$

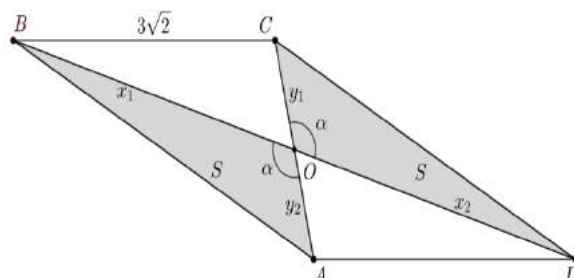
Наконец, при  $b = 0$  тождество (1) (с учетом (2)) примет вид  $f(a) \cdot f(a) = a^2$ . Значит необходимо, чтобы  $f(a) = a$  при  $a > 0$ , так как по условию  $f(x) > 0$  для  $x > 0$ . Далее, согласно (3),  $f(a) = a$  и при  $a < 0$ . Окончательно,  $f(x) = x$  для любого  $x \in \mathbb{R}$ . Легко убедиться, что такая  $f(x)$  действительно удовлетворяет требованиям 1), 2), 3) из условия задачи.

**Ответ:**  $f(x) = x$ .

5. В четырехугольнике  $ABCD$  диагонали пересекаются в точке  $O$ . Известно, что  $S_{ABO} = S_{CDO} = \frac{3}{2}$ ,  $BC = 3\sqrt{2}$ ,  $\cos \angle ADC = \frac{3}{\sqrt{10}}$ . Найдите синус угла между диагоналями этого четырехугольника, если его площадь принимает наименьшее возможное значение при данных условиях.

**Решение.** Докажем, что четырехугольник  $ABCD$  – параллелограмм. Пусть  $x_1, x_2, y_1, y_2$  – отрезки, на которые диагонали делятся их точкой пересечения. Обозначим угол между диагоналями через  $\alpha$ . По условию площади треугольников  $ABO$  и  $CDO$  равны, то есть  $\frac{1}{2}x_1y_2 \sin \alpha = \frac{1}{2}x_2y_1 \sin \alpha$ . Отсюда  $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$ , и, следовательно, треугольники  $BOC$  и  $AOD$  подобны по первому признаку подобия: две стороны ( $x_1$  и  $y_1$ ) треугольника  $BOC$  пропорциональны двум сторонам ( $x_2$  и  $y_2$ ) треугольника  $AOD$ , а углы, образованные этими сторонами ( $\angle BOC$  и  $\angle AOD$ ), равны. Пусть  $k = \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$  – коэффициент подобия треугольников  $BOC$  и  $AOD$ .

Обозначим через  $S$  площади треугольников  $ABO$  и  $CDO$  (по условию  $S = \frac{3}{2}$ ). Тогда  $S_{BOC} = k \cdot S$  и  $S_{AOD} = S/k$ . В итоге, площадь четырехугольника  $ABCD$  может быть представлена в виде:



**Межрегиональная олимпиада школьников на базе ведомственных образовательных организаций  
по математике**

$$S_{ABCD} = S_{AOD} + S_{CDO} + S_{BOC} + S_{ABO} = 2S + S \left( k + \frac{1}{k} \right).$$

Известно, что для  $k > 0$  минимальное значение выражения  $k + \frac{1}{k}$  достигается при  $k = 1$ . Значит,  $x_1 = x_2$  и  $y_1 = y_2$ , то есть диагонали четырехугольника точкой пересечения делятся пополам, поэтому  $ABCD$  – параллелограмм. Его площадь  $S_{ABCD} = 4S = 6$ .

Для нахождения синуса угла между диагоналями воспользуемся тем, что площадь четырехугольника равна половине произведения диагоналей на синус угла между ними:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD \cdot \sin \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \frac{2S_{ABCD}}{AC \cdot BD}. \quad (1)$$

Чтобы найти длины диагоналей, вычислим сторону  $CD$ , записав формулу для площади параллелограмма

$$S_{ABCD} = 4S = AD \cdot CD \cdot \sin \angle ADC \Rightarrow CD = \frac{4S}{AD \cdot \sin \angle ADC} = \frac{4 \cdot \frac{3}{2}}{3\sqrt{2} \sqrt{1 - \left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^2}} = 2\sqrt{5}.$$

Теперь найдем диагонали  $AC$  и  $BD$  по теореме косинусов из треугольников  $ADC$  и  $BCD$

$$AC = \sqrt{AD^2 + CD^2 - 2 \cdot AD \cdot CD \cdot \cos \angle ADC} = \sqrt{2},$$

$$BD = \sqrt{AD^2 + CD^2 + 2 \cdot AD \cdot CD \cdot \cos \angle ADC} = \sqrt{74}.$$

Подставив найденные значения в соотношение (1), получим  $\sin \alpha = \frac{6}{\sqrt{37}}$ .

**Ответ:**  $\frac{6}{\sqrt{37}}$

**6.** Найдите все простые числа, десятичная запись которых имеет вид  $101010 \dots 01$ .

**Решение.** Пусть  $2n + 1$  – количество цифр в исследуемом числе  $A = 101010 \dots 101$ . Пусть  $q = 10$  – основание системы счисления. Тогда  $A = q^0 + q^2 + \dots + q^{2n} = \frac{q^{2n+2}-1}{q^2-1}$ . Рассмотрим случаи четного и нечетного  $n$ .

- $n = 2k \Rightarrow A = \frac{q^{2n+2}-1}{q^2-1} = \frac{q^{2k+1}-1}{q-1} \cdot \frac{q^{2k+1}+1}{q+1}$ . Таким образом, число  $A$  представлено в виде произведения двух целых сомножителей (по теореме Безу многочлен  $q^{2k+1} \pm 1$  делится без остатка на многочлен  $q \pm 1$ ), каждый из которых отличен от 1. Значит, при четных  $n$  число  $A$  простым не является.

- $n = 2k - 1 \Rightarrow A = \frac{q^{2n+2}-1}{q^2-1} = \frac{q^{2k-1}-1}{q^2-1} \cdot (q^{2k} + 1)$ . При  $k > 1$  оба сомножителя целые и отличны от 1; значит, число  $A$  составное. Остается убедиться, что при  $k = 1$  получается простое число  $A = q^0 + q^2 = 101$ .

**Ответ:** 101.

**7.** Обыкновенная дробь  $\frac{1}{221}$  представлена в виде периодической десятичной дроби. Найдите длину периода. (Например, длина периода дроби  $\frac{25687}{99900} = 0,25712712712 \dots = 0,25(712)$  равна 3.)

**Решение.** Рассмотрим пример. Переведем обыкновенную дробь  $\frac{34}{275}$  в десятичную. Для этого выполним деление уголком (рис.). В результате найдем  $\frac{34}{275} = 0,123636363 \dots = 0,123(63)$ . Получена непериодическая часть 123 и период 63. Обсудим, почему непериодическая часть здесь возникла, и покажем, что у дроби  $\frac{1}{221}$  ее нет. Дело в том, что в десятичной записи дроби  $\frac{34}{275}$  цифра 3 появляется всякий раз, когда при очередном делении на 275 получается остаток 100. Мы видим (и это ключевой момент!), что здесь один и тот же остаток 100 дают различные числа: 650 и 1750. Откуда, в свою очередь, взялись эти 650 и 1750? Число 650 получилось дописыванием нуля к числу  $r_1 = 65$  (остатку

от деления на 275 числа 340). То есть  $10r_1 = 650$ . Аналогично,  $10r_2 = 1750$ , где  $r_2 = 175$ . Числа 650 и 1750 дают одинаковые остатки при делении на 275 из-за того, что их разность на 275 делится нацело:  $1750 - 650 = 10(r_2 - r_1) : 275$ . Такое возможно только потому, что числа 10 и 275 не взаимно просты. Теперь понятно, почему у дроби  $\frac{1}{221}$  непериодической части не будет: если  $r_1$  и  $r_2$  – это различные остатки от деления на 221, то произведение  $10(r_2 - r_1)$  на 221 нацело не делится (число 221, в отличие от 275, взаимно просто с 10 – основанием системы счисления, поэтому непериодической части нет).

$$\begin{array}{r}
 -34 \quad | \quad 275 \\
 \hline
 275 \quad | \quad 0,12363... \\
 \hline
 -650 \\
 \hline
 550 \\
 \hline
 1000 \\
 \hline
 -825 \\
 \hline
 1750 \\
 \hline
 1650 \\
 \hline
 1000 \\
 \hline
 825 \\
 \hline
 1750 \\
 \hline
 \dots
 \end{array}$$

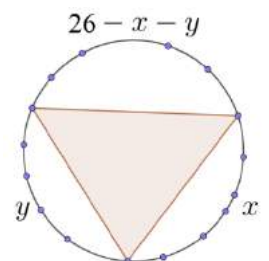
Итак, десятичная запись дроби  $\frac{1}{221}$  имеет вид  $\frac{1}{221} = 0, (a_1 a_2 \dots a_n)$ . Найдем  $n$ . Обозначим  $A = a_1 a_2 \dots a_n$ . Тогда  $\frac{1}{221} = 10^{-n} \cdot A + 10^{-2n} \cdot A + \dots$ . По формуле для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии  $\frac{1}{221} = \frac{A}{10^n - 1}$ . Отсюда  $A = \frac{10^n - 1}{221}$ . Поскольку  $A$  – натуральное число, требуется найти (наименьшее) натуральное  $n$ , при котором число  $10^n$  дает остаток 1 при делении на 221.

Заметим, что  $221 = 13 \cdot 17$ . Вообще, целое число  $B$  (у нас  $B = 10^n$ ) при делении на 221 дает остаток 1 в том и только том случае, когда  $B$  при делении и на 13, и на 17 также дает остаток 1. Необходимость очевидна. Достаточность: если  $B = 13k_1 + 1$  и  $B = 17k_2 + 1$ , то  $13k_1 = 17k_2$ , а значит число  $k_1$  делится на 17, то есть  $k_1 = 17m$ . Поэтому  $B = 13 \cdot 17m + 1$ , и при делении на 221 действительно получается остаток 1. Найдем теперь такие  $n$ , что число  $10^n$  дает остаток 1 при делении на 13. Рассмотрим последовательность  $b_n = 10^n$ . Заменим ее члены остатками от деления на 13. Получится вот что:  $b_1 = 10, b_2 = 9, b_3 = 3, b_4 = 13, b_5 = 3, b_6 = 4, b_7 = 1, \dots$  Каждый последующий член однозначно определяется предыдущим. Значит,  $\{b_n\}$  – периодическая последовательность, в которой каждый шестой член равен 1. То же сделаем для 17. Там единице будет равен каждый 16-й член. Таким образом, остаток 1 при делении и на 13, и на 17 получится при  $n = \text{НОК}(6,16) = 48$ .

**Ответ:** 48.

**8.** Аня с Борей играют в «морской бой» по следующим правилам: на окружности выбираются 29 различных точек, пронумерованных по часовой стрелке натуральными числами от 1 до 29. Аня рисует корабль – произвольный треугольник с вершинами в этих точках. Будем называть «выстрелом» выбор двух различных натуральных чисел  $k$  и  $m$  от 1 до 29. Если отрезок с концами в точках с номерами  $k$  и  $m$  имеет с треугольником Ани хотя бы одну общую точку, то корабль считается «раненым». Боря производит «залп» – несколько выстрелов одновременно. Аня нарисовала корабль и показала его Боре. И тут они заметили, что любой «залп» из  $K$  различных выстрелов *обязательно* ранит корабль Ани. Укажите какое-нибудь расположение корабля Ани, при котором значение  $K$  будет минимальным.

**Решение.** Вершины треугольника Ани делят окружность на три дуги (рис.). Пусть  $x, y$  и  $26 - x - y$  – количество точек на этих дугах (рис.), не считая вершины самого треугольника. Чтобы «выстрел» с концами в точках  $k$  и  $m$  не задел корабль, надо чтобы обе эти точки лежали на одной из дуг. Выбрать две различные точки на дуге, содержащей  $x$  точек, можно, очевидно,  $C_x^2$  способами. То же и для остальных дуг. Значит число  $N$  «безопасных» выстрелов равно сумме  $N = C_x^2 + C_y^2 + C_{26-x-y}^2$ . Тогда следующий выстрел уже *обязательно* «ранит» корабль, поэтому  $K = N + 1$ .



Итак, требуется найти такие целые неотрицательные числа  $x, y$ , удовлетворяющие условию  $x + y \leq 26$ , при которых значение  $N$  минимально. Запишем выражение для  $N$  в развернутом виде:

$$N = \frac{x(x-1)}{2} + \frac{y(y-1)}{2} + \frac{(26-x-y)(25-x-y)}{2}.$$

Раскрыв скобки и приведя подобные, получим

$$N = x^2 - x(26 - y) + y^2 - 26y + 325. \tag{1}$$

**Межрегиональная олимпиада школьников на базе ведомственных образовательных организаций  
по математике**

При каждом фиксированном  $y$  от 0 до 26 будем искать такое значение  $x$ , удовлетворяющее неравенству

$$0 \leq x \leq 26 - y, \quad (2)$$

при котором значение  $N$  минимально. Если  $y$  фиксирован, то правая часть (1) принимает минимальное значение при

$$x = \frac{26-y}{2} \quad (3)$$

(вершина параболы, принадлежащая промежутку (2)). Это минимальное значение равно  $\frac{3}{4}y^2 - 13y + 156$ . Оно, в свою очередь, минимально при  $y = \frac{26}{3} \approx 8,6$ . Из (3) тогда находим  $x = \frac{26}{3}$ . Среди точек с целыми координатами (8,8), (8,9), (9,8), (9,9) – ближайших целочисленных соседей точки минимума  $(\frac{26}{3}, \frac{26}{3})$  – выбираем ту, которой соответствует наименьшее значение  $N$ . Это точки (8,9), (9,8), (9,9). Для них  $N = 100$ .

**Ответ:** Корабль следует расположить так, чтобы на трех дугах, на которые вершины корабля разбивают окружность, располагалось по 8, 9 и 9 точек (не считая вершины самого корабля).