10 КЛАСС

1. Найдите сумму всех кратных трем натуральных чисел n, у которых число делителей (включая 1 и само n) равно $\frac{n}{3}$. (Например, число 12 имеет 6 делителей: 1,2,3,4,6,12.).

Решение. Пусть каноническое разложение числа n имеет вид: $n = 2^{t_1} \cdot 3^{t_2} \cdot 5^{t_3} \cdot \dots \cdot p^{t_k}$. Тогда количество делителей числа n равно $(t_1+1)(t_2+1)(t_3+1)\cdots(t_k+1)$. Из условия задачи имеем равенство:

$(t_1+1)(t_2+1)(t_3+1)\cdots(t_k+1) = 2^{t_1} \cdot 3^{t_2-1} \cdot 5^{t_3} \cdot \dots \cdot p^{t_k}$. (*)

Заметим, что $2^{t_1}3^{t_2-1} > (t_1+1)(t_2+1)$ при $t_1 \geq 4$ и $t_2 \geq 3$, …, $p^{t_k} > t_k + 1$ при $t_k \geq 1$. Следовательно, t_1 может принимать значения 0, 1, 2 или 3 и t_2 может принимать значения 1 или 2. Подставляя указанные значения в равенство (*), найдём, что $n = 9, n = 18$ или $n = 24$.

Ответ: 51.

2. Сколькими способами из первых 1000 натуральных чисел $1,2,\dots,1000$ можно выбрать 4 числа, образующих возрастающую арифметическую прогрессию?

Решение. Найдём формулу для вычисления числа способов из первых n натуральных чисел $1,2,\dots,n$выбрать 4 числа, образующих возрастающую арифметическую прогрессию. Количество прогрессий с разностью 1 равно $n-3$ (первый член прогрессии может принимать значения от 1 до $n-3$ включительно), количество прогрессий с разностью 2 равно $n-6$, … , количество прогрессий с разностью d равно $n-3d$. Разность d удовлетворяет неравенству $1+3d \leq n$(если первый член прогрессии равен 1, то ее четвертый член, $1+3d$, не превосходит n). Поэтому наибольшее значение разности равно $d_{max} = \left[\frac{n-1}{3}\right]$ (квадратные скобки обозначают целую часть числа). Следовательно, количество прогрессий, удовлетворяющих условию задачи, равно:

$$(n-3)+(n-6)+\dots+(n-3k) = \frac{(2n-3k-3)k}{2}, \text{где } k = d_{max}.$$

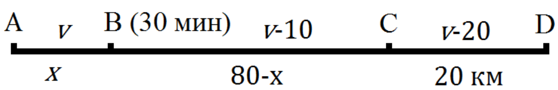
При $n = 1000$ имеем $k = 333$ и число способов равно 166167

Ответ: 166167.

3. Из пункта A в пункт D, расстояние между которыми равно 100 км, выехал автомобилист. Дорога из A в D проходит через пункты B и C. В пункте B навигатор показал, что ехать осталось 30 мин, и автомобилист тут же снизил скорость на 10 км/ч. В пункте C навигатор показал, что ехать осталось 20 км, и автомобилист сразу же второй раз снизил скорость на те же 10 км/ч. (Навигатор определяет оставшееся время на основании текущей скорости движения.) Определите первоначальную скорость автомобиля, если известно, что на путь из B в C он потратил на 5 мин больше времени, чем на путь из C в D.

Решение. По условию, расстояние от C до D равно 20 км. Обозначим расстояние от A до B через x (км), тогда расстояние от B до C составит $(80-x)$ км.

Пусть $v\frac{\text{км}}{\text{ч}}$ – первоначальная скорость автомобиля. Тогда на участках BC и CD она равна $(v-10)\frac{\text{км}}{\text{ч}}$ и $(v-20)\frac{\text{км}}{\text{ч}}$, соответственно. По условию, путь от B до D занял бы полчаса, если бы автомобиль продолжал двигаться со скоростью $v\frac{\text{км}}{\text{ч}}$, то есть



$$100 - x = \frac{v}{2}. \qquad (1)$$

Далее, на путь из B в C он потратил на 5 мин больше времени, чем на путь из C в D:

$$\frac{80-x}{v-10}-\frac{20}{v-20}=\frac{1}{12}. \qquad (2)$$

Выразив x из первого уравнения и подставив во второе, получим уравнение для определения v:

$$\frac{\frac{v}{2}-20}{v-10}-\frac{20}{v-20}=\frac{1}{12},$$

которое имеет корни 14 и 100. Корень 14, очевидно, посторонний, так как $v>20$.

Ответ: 100.

4. Найдите число решений уравнения $\sin\frac{\pi n}{12}\cdot\sin\frac{\pi k}{12}\cdot\sin\frac{\pi m}{12}=\frac{1}{8}$. Здесь k, m, n – натуральные числа, не превосходящие 5.

Решение.

Пусть $1\le n\le k\le m\le 5$.

Рассмотрим случаи:

1. $n=k=m=2$. Очевидно, этот набор – решение.

2. $n=1$. Тогда заметим, что при $k=2,\ m=5$ получим верное равенство.

Функция $y=\sin x$ на промежутке $(0;\frac{\pi}{2})$ возрастает, поэтому наборы $(2;k;m)$ при $k\ge 3$ и $(1;2;3),(1;2;4);(1;3;5),(1;4;5)$ не являются решениями.

Остается убедиться, что $(1;3;4)$ не является решением.

Ответ: 7.

5. В треугольнике ABC стороны $AB=4, BC=6$. Точка M лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB, при этом прямые AM и AC перпендикулярны. Найти MA, если радиус описанной вокруг треугольника ABC окружности равен 9.

Решение. Введём систему координат с началом в точке A так, чтобы точка C лежала на оси абсцисс. Из условия задачи точка M лежит на оси ординат. Введём для неизвестных координат обозначения: $A(0,0), B(x_B, y_B), C(x_C, 0), M(0, y_M)$. Обозначим через N середину AB и через O центр описанной окружности, тогда $N(\frac{x_B}{2},\frac{y_B}{2})$ и $O\left(\frac{x_C}{2}, y_O\right)$. Из перпендикулярности векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{MN}$ следует, что $x_B\frac{x_B}{2}+y_B\left(y_M-\frac{y_B}{2}\right)=0$. Откуда, учитывая $AB^2=x_B^2+y_B^2=16$, получаем $y_M=\frac{8}{y_b}$. Из перпендикулярности векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{MO}$ следует, что $x_B\frac{x_C}{2}+y_B(y_M-y_O)=0$. Кроме этого $BC^2=(x_B-x_C)^2+y_B^2=36$ и $AO^2=\left(\frac{x_C}{2}\right)^2+y_0^2=81$. Этих уравнений достаточно, чтобы получить $MA=|y_M|=6$.

Ответ: 6.