10 КЛАСС

1. Действительные числа x, y, z удовлетворяют соотношениям:

$$4x^2 - 2x - 30yz = 25y^2 + 5y + 12xz = 9z^2 - 3z - 20xy.$$

Найдите все возможные тройки чисел (a, b, c), где $a = 2x + 5y, b = 3z + 5y, c = 3z - 2x$.

Решение. Заметим, что

$$a - b + c = 0. \qquad (1)$$

Обозначим $A = 4x^2 - 2x - 30yz,\ B = 25y^2 + 5y + 12xz$ и $C = 9z^2 - 3z - 20xy$. Вычитая друг из друга эти равенства, получим

$$\begin{aligned} A - B = a \cdot (2\,x - 6\,z - 5\,y - 1) = 0, \\ B - C = b \cdot (5\,y + \ 4\,x - \ 3\,z + 1) = 0, \\ A - C = c \cdot (1 - 2x - 10y - 3z) = 0. \end{aligned} \qquad (2)$$

Предположим, что все три числа a, b, c отличны от нуля. Тогда $2x - 6z - 5y - 1 = 0, 5y + \ +4x - 3z + 1 = 0$ и $1 - 2x - 10y - 3z = 0$, что невозможно, так как, сложив 2-е равенство с 3-им и вычтя 1-е, получим $3 = 0$. Значит, хотя бы одно из чисел a, b, c равно нулю. Рассмотрим возможные случаи:

1) Все три числа a, b, c равны нулю. Тройка $a = b = c = 0$ очевидно удовлетворяет условиям задачи (достаточно взять $x = y = z = 0$).

2) Среди чисел a, b, c только два равны нулю. Это невозможно: если два числа равны нулю, то, согласно (1), равно нулю и третье.

3) Только одно из чисел a, b, c равно нулю.

- $a = 0$. Тогда $x = -\frac{5y}{2}$. Из системы (2) находим $b = c = 1$;
- $b = 0$. Тогда $a = -c = 1$;
- $c = 0$. Тогда $a = b = -1$.

Ответ: $(0,0,0), (0,1,1), (1,0,-1), (-1,-1,0)$.

2. Найдите все такие функции $f(x)$, которые одновременно удовлетворяют трем условиям: 1) $f(x) > 0$ для любого $x > 0$; 2) $f(1) = 1$; 3) $f(a + b) \cdot \big(f(a) + f(b)\big) = 2f(a) \cdot f(b) + +a^2 + b^2$ для любых $a, b \in \mathbb{R}$.

Решение. В тождестве из условия задачи

$$f(a + b) \cdot \big(f(a) + f(b)\big) = 2f(a) \cdot f(b) + a^2 + b^2 \qquad (1)$$

положим $a = 1, b = 0$. Тогда $f(1) \cdot \big(f(1) + f(0)\big) = 2f(1) \cdot f(0) + 1$. Поскольку $f(1) = 1$, находим

$$f(0) = 0. \qquad (2)$$

Положив затем $b = -a$ в (1), получим, с учетом (2), что

$$f(a) \cdot f(-a) = -a^2. \qquad (3)$$

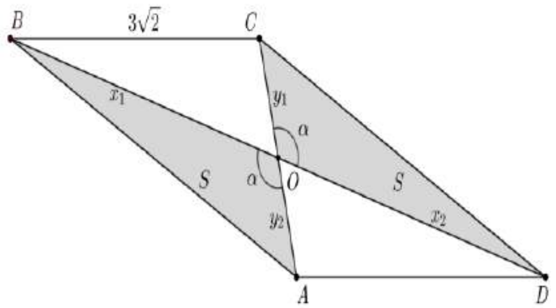
Наконец, при $b = 0$ тождество (1) (с учетом (2)) примет вид $f(a) \cdot f(a) = a^2$. Значит необходимо, чтобы $f(a) = a$ при $a > 0$, так как по условию $f(x) > 0$ для $x > 0$. Далее, согласно (3), $f(a) = a$ и при $a < 0$. Окончательно, $f(x) = x$ для любого $x \in \mathbb{R}$. Легко убедиться, что такая $f(x)$ действительно удовлетворяет требованиям 1), 2), 3) из условия задачи.

Ответ: $f(x) = x$.

3. В четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Известно, что $S_{ABO} = S_{CDO} = \frac{3}{2}BC = 3\sqrt{2}$, $\cos\angle ADC = \frac{3}{\sqrt{10}}$. Найдите синус угла между диагоналями этого четырехугольника, если его площадь принимает наименьшее возможное значение при данных условиях.

Решение. Докажем, что четырехугольник $ABCD$ – параллелограмм. Пусть x_1, x_2, y_1, y_2 – отрезки, на которые диагонали делятся их точкой пересечения. Обозначим угол между диагоналями через α. По условию площади треугольников ABO и CDO равны, то есть $\frac{1}{2}x_1y_2\sin\alpha = \frac{1}{2}x_2y_1\sin\alpha$. Отсюда $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$, и, следовательно, треугольники BOC и AOD подобны по первому признаку подобия: две стороны (x_1 и

y_1) треугольника BOC пропорциональны двум сторонам (x_2 и y_2) треугольника AOD, а углы, образованные этими сторонами ($\angle BOC$ и $\angle AOD$), равны. Пусть $k = \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$ – коэффициент подобия треугольников BOC и AOD. Обозначим через S площади треугольников ABO и CDO (по условию $S = \frac{3}{2}$). Тогда $S_{BOC} = k \cdot S$ и $S_{AOD} = S/k$. В итоге, площадь четырехугольника $ABCD$ может быть представлена в виде: $S_{ABCD} = S_{AOD} + S_{CDO} + S_{BOC} + S_{ABO} = 2S + S\left(k + \frac{1}{k}\right)$.



Известно, что для $k > 0$ минимальное значение выражения $k + \frac{1}{k}$ достигается при $k = 1$. Значит, $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$, то есть диагонали четырехугольника точкой пересечения делятся пополам, поэтому $ABCD$ – параллелограмм. Его площадь $S_{ABCD} = 4S = 6$.

Для нахождения синуса угла между диагоналями воспользуемся тем, что площадь четырехугольника равна половине произведения диагоналей на синус угла между ними

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD \cdot \sin\alpha \Rightarrow \sin\alpha = \frac{2S_{ABCD}}{AC \cdot BD}. \qquad (1)$$

Чтобы найти длины диагоналей, вычислим прежде сторону CD, записав формулу для площади параллелограмма

$$S_{ABCD} = 4S = AD \cdot CD \cdot \sin\angle ADC \Rightarrow CD = \frac{4S}{AD \cdot \sin\angle ADC} = \frac{4 \cdot \frac{3}{2}}{3\sqrt{2}\sqrt{1 - \left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^2}} = 2\sqrt{5}.$$

Теперь найдем диагонали AC и BD по теореме косинусов из треугольников ADC иBCD:

$$AC = \sqrt{AD^2 + CD^2 - 2 \cdot AD \cdot CD \cdot \cos\angle ADC} = \sqrt{2},$$

$$BD = \sqrt{AD^2 + CD^2 + 2 \cdot AD \cdot CD \cdot \cos\angle ADC} = \sqrt{74}.$$

Подставив найденные значения в соотношение (1), получим $\sin\alpha = \frac{6}{\sqrt{37}}$.

Ответ: $\frac{6}{\sqrt{37}}$.

4. В одной из клеток бесконечной клетчатой бумаги находится робот, которому могут быть отданы следующие команды:

- **вверх** (робот перемещается на соседнюю клетку сверху);
- **вниз** (робот перемещается на соседнюю клетку снизу);
- **влево** (робот перемещается на соседнюю клетку слева);
- **вправо** (робот перемещается на соседнюю клетку справа).

Если, например, робот выполнит последовательность из четырех команд (**вверх, вправо, вниз, влево**), то он, очевидно, вернется в исходное положение, т.е. окажется в той же клетке, из которой начал движение. Сколько существует различных последовательностей из 8 команд, возвращающих робота в исходное положение?

Решение. Для краткости команду **влево** будем обозначать **Л**, **вправо – П**, **вверх – В**, **вниз – Н**. Чтобы робот вернулся в исходное положение необходимо и достаточно, чтобы ему было отдано команд **Л** столько же, сколько и команд **П**, а команд **В** – столько же, сколько и **Н**. Пусть k – количество команд **Л** в последовательности. Подсчитаем количество N_k искомых последовательностей для k от 0 до 4.

- $\boldsymbol{k = 0}$. Последовательность состоит только из команд **В** и **Н**. Так как их поровну, то на 4 местах из 8 должна быть команда **В**, а на остальных – **Н**. Выбрать 4 места из 8 можно C_8^4 способами. Следовательно, $N_0 = C_8^4 = 70$;

- $\boldsymbol{k=1}$. Последовательность состоит из одной команды **Л**, одной **П**, а также трех **В** и трех **Н**. Разместить две команды **Л** и **П** на 8 позициях можно $C_8^2 \cdot C_2^1$ способами: C_8^2 – число способов вообще выбрать 2 позиции из 8, $C_2^1 = 2$ – число способов разместить на этих двух позициях команды **Л** и **П**. На оставшихся 6 позициях следует разместить 3 команды **В**, что можно сделать C_6^3 способами. Поэтому $N_1 = C_8^2 \cdot C_2^1 \cdot C_6^3 = 1120$;
- $\boldsymbol{k=2}$. Здесь две **Л**, две **П,** а также по 2 команды **В** и **Н**. Для **Л** и **П** имеем $C_8^4 \cdot C_4^2$ вариантов размещения. На оставшихся 4 позициях разместить 2 команды **В** можно C_4^2 способами. Значит $N_2 = C_8^4 \cdot C_4^2 \cdot C_4^2 = 2520$.

Рассуждая аналогичным образом, можно показать, что $N_3 = N_1$ и $N_4 = N_0$. Таким образом, искомое число последовательностей равно $2 \cdot (N_0 + N_1) + N_2 = 4900$.

Ответ: 4900.

5. Найдите все простые числа, десятичная запись которых имеет вид $101010 \ldots 101$ (единицы и нули чередуются).

Решение: Пусть $2n+1$ – количество цифр в исследуемом числе $A = 101010 \ldots 101$. Пусть $q = 10$ – основание системы счисления. Тогда $A = q^0 + q^2 + \cdots q^{2n} = \frac{q^{2n+2}-1}{q^2-1}$. Рассмотрим случаи четного и нечетного n.

- $n = 2k \Rightarrow A = \frac{q^{2n+2}-1}{q^2-1} = \frac{q^{2k+1}-1}{q-1} \cdot \frac{q^{2k+1}+1}{q+1}$. Таким образом, число A представлено в виде произведения двух целых сомножителей (по теореме Безу многочлен $q^{2k+1} \pm 1$ делится без остатка на многочлен $q \pm 1$), каждый из которых отличен от 1. Значит, при четных n число A простым не является.
- $n = 2k-1 \Rightarrow A = \frac{q^{2n+2}-1}{q^2-1} = \frac{q^{2k}-1}{q^2-1} \cdot (q^{2k}+1)$. При $k > 1$ оба сомножителя целые и отличны от 1; значит, число A составное. Остается убедиться, что при $k = 1$ получается простое число $A = q^0 + q^2 = 101$.

Ответ: 101.

6. Найдите какие-нибудь целые числа A и B, для которых выполняется неравенство $0{,}999 < A + B \cdot \sqrt{2} < 1$.

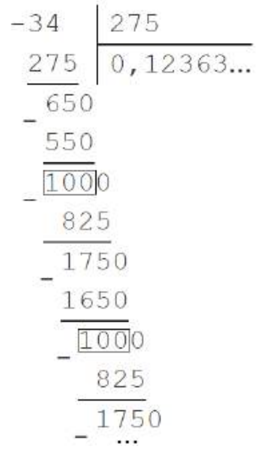
Решение: Заметим, что если число вида $x + y \cdot \sqrt{2}$, где x, y целые, возвести в целую неотрицательную степень n, то вновь получим число такого же вида, т.е. $\left(x + y \cdot \sqrt{2}\right)^n = x_1 + y_1 \cdot \sqrt{2}$, где x_1 и y_1 опять же целые. Положительное число $\sqrt{2} - 1$, очевидно, меньше 1. Значит, возводя его в достаточно большую степень, можно получить число сколь угодно малое. Найдем такое натуральное n, что $\left(\sqrt{2}-1\right)^n < 0{,}001$. Поскольку $\left(\sqrt{2}-1\right)^n < \frac{1}{2^n}$, то, очевидно, достаточно взять $n = 10$, так как $\frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{1024} < \frac{1}{1000} = 0{,}001$. Остается возвести $\sqrt{2} - 1$ в 10-ю степень. Находим: $\left(\sqrt{2}-1\right)^2 = 3 - 2\sqrt{2}$, $\left(\sqrt{2}-1\right)^4 = \left(3 - 2\sqrt{2}\right)^2 = 17 - 12\sqrt{2}$, $\left(\sqrt{2}-1\right)^8 = \left(17 - 12\sqrt{2}\right)^2 = 577 - 408\sqrt{2}$, $\left(\sqrt{2}-1\right)^{10} = \left(\sqrt{2}-1\right)^8 \cdot \left(\sqrt{2}-1\right)^2 = \left(577 - 408\sqrt{2}\right) \cdot \left(3 - 2\sqrt{2}\right) = 3363 - 2378\sqrt{2}$. Таким образом, $0{,}999 < 1 - \left(\sqrt{2}-1\right)^{10} < 1$, поэтому можно взять $A = -3362, B = 2378$.

Ответ: Например, $A = -3362, B = 2378$. **Замечание.** *Приведенная в решении оценка очень грубая. На самом деле, уже*

$$\left(\sqrt{2}-1\right)^8 = 577 - 408\sqrt{2} \approx 0{,}000867 < 0{,}001. \text{ Но } \left(\sqrt{2}-1\right)^7 \approx 0{,}002 > 0{,}001.$$

7. Обыкновенная дробь $\frac{1}{221}$ представлена в виде периодической десятичной дроби. Найдите длину периода. (Например, длина периода дроби $\frac{25687}{99900} = 0{,}25712712712\ldots = 0{,}25(712)$ равна 3.)

Решение. Рассмотрим пример. Переведем обыкновенную дробь $\frac{34}{275}$ в десятичную. Для этого выполним деление уголком (рис.). В результате найдем $\frac{34}{275} = 0{,}123636363\ldots = 0{,}123(63)$. Получена непериодическая часть 123 и период 63. Обсудим, почему непериодическая часть здесь возникла, и покажем, что у дроби $\frac{1}{221}$ ее нет. Дело в том, что в десятичной записи дроби $\frac{34}{275}$ цифра 3 появляется всякий раз, когда при очередном делении на 275 получается остаток 100. Мы видим (и это ключевой момент!), что здесь один и тот же остаток 100 дают *различные* числа: 650 и 1750. Откуда, в свою очередь, взялись эти 650 и 1750? Число 650 получилось дописыванием нуля к числу $r_1 = 65$ (остатку от деления на 275 числа 340). То есть $10r_1 = 650$. Аналогично, $10r_2 = 1750$, где $r_2 = 175$. Числа 650 и 1750 дают одинаковые остатки при делении на 275 из-за того, что их разность на 275 делится нацело: $1750 - 650 = 10(r_2 - r_1) \vdots 275$. Такое возможно только потому, что числа 10 и 275 не взаимно просты. Теперь понятно, почему у дроби $\frac{1}{221}$ непериодической части не будет: если r_1 и r_2 – это различные остатки от деления на 221, то произведение $10(r_2 - r_1)$ на 221 нацело не делится (число 221, в отличие от 275, взаимно просто с 10 – основанием системы счисления, поэтому непериодической части нет).



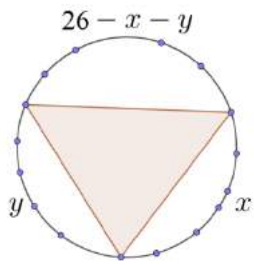
Итак, десятичная запись дроби $\frac{1}{221}$ имеет вид $\frac{1}{221} = 0,(a_1a_2\ldots a_n)$. Найдем n. Обозначим $A = a_1a_2\ldots a_n$. Тогда $\frac{1}{221} = 10^{-n}\cdot A + 10^{-2n}\cdot A + \cdots$. По формуле для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии $\frac{1}{221} = \frac{A}{10^n - 1}$. Отсюда $A = \frac{10^n - 1}{221}$. Поскольку A – натуральное число, требуется найти (наименьшее) натуральное n, при котором число 10^n дает остаток 1 при делении на 221.

Заметим, что $221 = 13 \cdot 17$. Вообще, целое число B (у нас $B = 10^n$) при делении на 221 дает остаток 1 в том и только том случае, когда B при делении и на 13, и на 17 также дает остаток 1. Необходимость очевидна. Достаточность: если $B = 13k_1 + 1$ и $B = 17k_2 + 1$, то $13k_1 = 17k_2$, а значит число k_1 делится на 17, то есть $k_1 = 17m$. Поэтому $B = 13 \cdot 17m + 1$, и при делении на 221 действительно получается остаток 1. Найдем теперь такие n, что число 10^n дает остаток 1 при делении на 13. Рассмотрим последовательность $b_n = 10^n$. Заменим ее члены остатками от деления на 13. Получится вот что: $b_1 = 10, b_2 = 9, b_3 = 13, b_4 = 3, b_5 = 4, b_6 = 1, \ldots$ Каждый последующий член однозначно определяется предыдущим. Значит, $\{b_n\}$ – периодическая последовательность, в которой каждый шестой член равен 1. То же проделаем для 17. Там единице будет равен каждый 16-й член. Таким образом, остаток 1 при делении и на 13, и на 17 получится при $n = \text{НОК}(6{,}16) = 48$.

Ответ: 48.

8. Аня с Борей играют в «морской бой» по следующим правилам: на окружности выбираются 29 различных точек, пронумерованных по часовой стрелке натуральными числами от 1 до 29. Аня рисует корабль – произвольный треугольник с вершинами в этих точках. Будем называть «выстрелом» выбор двух различных натуральных чисел k и m от 1 до 29. Если отрезок с концами в точках с номерами k и m имеет с треугольником Ани хотя бы одну общую точку, то корабль считается «раненым». Боря производит «залп» – несколько выстрелов одновременно. Аня нарисовала корабль и показала его Боре. И тут они заметили, что любой «залп» из K различных выстрелов обязательно ранит корабль Ани. Укажите какое-нибудь расположение корабля Ани, при котором значение K будет минимальным.

Решение. Вершины треугольника Ани делят окружность на три дуги. Пусть x, y и $26-x-y$ – количество точек на этих дугах (рис.), не считая вершины самого треугольника. Чтобы «выстрел» с концами в точках k и m не задел корабль, надо чтобы обе эти точки лежали на одной из дуг. Выбрать две различные точки на дуге, содержащей x точек, можно, очевидно, C_x^2 способами. То же и для остальных дуг. Значит число N «безопасных» выстрелов равно сумме $N = C_x^2 + C_y^2 + C_{26-x-y}^2$. Тогда следующий выстрел уже обязательно «ранит» корабль, поэтому $K = N + 1$.



Итак, требуется найти такие целые неотрицательные числа x, y, удовлетворяющие условию $x + y \leq 26$, при которых значение N минимально. Запишем выражение для N в развернутом виде:

$$N = \frac{x(x-1)}{2} + \frac{y(y-1)}{2} + \frac{(26-x-y)(25-x-y)}{2}.$$

Раскрыв скобки и приведя подобные, получим

$$N = x^2 - x(26-y) + y^2 - 26y + 325. \quad (1)$$

При каждом фиксированном y от 0 до 26 будем искать такое значение x, удовлетворяющее неравенству

$$0 \leq x \leq 26 - y, \quad (2)$$

при котором значение N минимально. Если y фиксирован, то правая часть (1) принимает минимальное значение при

$$x = \frac{26-y}{2} \quad (3)$$

(вершина параболы, принадлежащая промежутку (2)).

Это минимальное значение равно $\frac{3}{4}y^2 - 13y + 156$. Оно, в свою очередь, минимально при $y = \frac{26}{3} \approx 8{,}6$. Из (3) тогда находим $x = \frac{26}{3}$. Среди точек с целыми координатами $(8,8), (8,9), (9,8), (9,9)$ – ближайших целочисленных соседей точки минимума $\left(\frac{26}{3}, \frac{26}{3}\right)$ – выбираем ту, которой соответствует наименьшее значение N. Это точки $(8,9), (9,8), (9,9)$. Для них $N = 100$.

Ответ: Корабль следует расположить так, чтобы на трех дугах, на которые вершины корабля разбивают окружность, располагалось по 8, 9 и 9 точек (не считая вершины самого корабля).