9 КЛАСС

Вариант 1

7. Вычислите выражение $9999(0,(0001)+0,(0002)+\ldots+0,(2017))$.

Решение: Воспользовавшись правилом перевода периодической десятичной дроби в обыкновенную, а также формулой для суммы первых 2017 членов арифметической прогрессии, найдем

$$0,(0001)+0,(0002)+\ldots+0,(2017)=\frac{1}{9999}+\frac{2}{9999}+\ldots+\frac{2017}{9999}=\frac{1009\cdot 2017}{9999}=\frac{2035153}{9999}.$$

Ответ: 2035153

8. Имеется неограниченное количество пробирок трёх видов – А, В и С. Каждая из пробирок содержит один грамм раствора одного и того же вещества. В пробирках вида А содержится 10% раствор этого вещества, в пробирках В – 20% раствор и в С – 90% раствор. Последовательно, одну за другой, содержимое пробирок переливают в некоторую ёмкость. При этом при двух последовательных переливаниях нельзя использовать пробирки одного вида. Известно, что в ёмкости получили 20,17% раствор, выполнив при этом наименьшее количество переливаний. Какое наибольшее количество пробирок вида С может быть при этом использовано?

Решение: Пусть пробирок вида А, В и С взяли соответственно *a*,*b* и *c* штук. По условию $0,1a+0,2b+0,9c=0,2017\cdot(a+b+c)\Leftrightarrow 1000\cdot(a+2b+9c)=2017\cdot(a+b+c)$. Левая часть последнего равенства делится на 1000, следовательно на 1000 должна делиться и правая часть. Значит, наименьшее возможное значение суммы $a+b+c$ равно 1000. Покажем, что эта оценка достижима. То есть, докажем, что существуют неотрицательные целые числа *a*,*b* и *c* такие, что

$$\begin{cases} a+b+c=1000 \\ a+2b+9c=2017 \\ a\le 500,\ b\le 500,\ c\le 500. \end{cases} \qquad (1)$$

Последние три неравенства служат необходимым и достаточным условиям того, что удастся избежать использования пробирок одного вида при двух последовательных переливаниях.

Из первых двух уравнений системы (1) находим

$$a=7c-17, b=1017-8c. \qquad (2)$$

Подставив эти выражения в последние три неравенства системы (1), получим

$$7c\le 517, 8c\ge 518, c\le 500.$$

Отсюда наибольшее значение c равно 73. Ему соответсвующие значения a и b могут быть найдены из (2). Они, очевидно, удовлетворяют неравенствам системы (1). Таким образом, разрешимость в неотрицательных целых числах системы (1) доказана.

Ответ: **73**

9. Найти сумму квадратов натуральных делителей числа 1800. (Например, сумма квадратов натуральных делителей числа 4 равна $1^2+2^2+4^2=21$).

Решение: Пусть $\sigma(N)$ – сумма квадратов натуральных делителей натурального числа N. Заметим, что для любых двух взаимно простых натуральных чисел a и b справедливо равенство: $\sigma(ab)=\sigma(a)\cdot\sigma(b)$. Действительно, любой делитель произведения ab есть произведение делителя a и делителя b. И наоборот: умножив делитель a на делитель b, поучим делитель произведения ab. Это же, очевидно, верно и для квадратов делителей (квадрат делителя произведения равен произведению квадратов делителей сомножителей и наоборот).

Рассмотрим разложение числа N на простые множители: $N=p_1^{k_1}\cdot\ldots\cdot p_n^{k_n}$. Здесь p_i – попарно различны простые числа, и все $k_i\in N$. Тогда $\sigma(N)=\sigma\left(p_1^{k_1}\right)\cdot\ldots\cdot\sigma\left(p_n^{k_n}\right)$ и $\sigma\left(p^k\right)=1+p^2+p^4+\ldots p^{2k}$. Поскольку $1800=2^3\cdot 3^2\cdot 5^2$, то

$$\sigma(1800)=\left(1+2^2+2^4+2^6\right)\cdot\left(1+3^2+3^4\right)\cdot\left(1+5^2+5^4\right)=5035485.$$

Ответ: 5035485.

10. Имеются таблицы A и B, в ячейки которых вписаны целые числа. С таблицей A можно проделывать следующие действия: 1) прибавлять к строке другую строку, умноженную на произвольное целое число; 2) прибавлять к столбцу другой столбец, умноженный на произвольное целое число. (Например, если к первой строке таблицы A прибавить вторую строку, умноженную на 4, то получится таблица, изображенная на рисунке справа после слова *пример*.) Найти значение неизвестного элемента x в таблице B, для которого таблица B может быть получена из таблицы A в результате некоторого количества указанных действий.

Таблица A

1	0

Таблица B

6	2

Пример

1	8

0	2

x	7

0	2

Решение: Если таблица 2 получена из таблицы 1 одним из указанных действий, то $a_1d_1 - b_1c_1 = a_2d_2 - b_2c_2$, что для таблиц A и B выполнено при условии, что x – решение уравнения $2 = 42 - 2x$.

Таблица 1

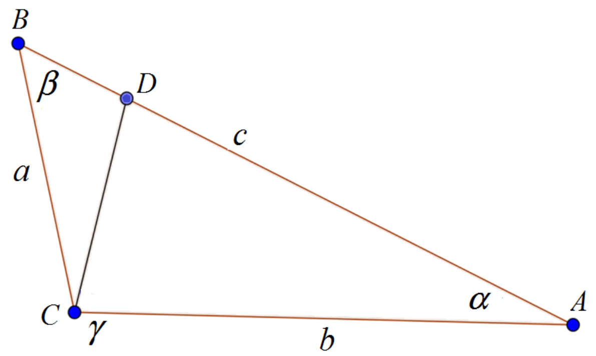
a_1	b_1
c_1	d_1

Таблица 2

a_2	b_2
c_2	d_2

Ответ: 20.

11. В треугольнике со сторонами a,b,c и углами α,β,γ выполнено равенство $3\alpha + 2\beta = 180^0$. Стороны a,b,c лежат соответственно напротив углов α,β,γ. Найти длину стороны c при $a = 2, b = 3$



Решение: Из условия следует, что $c > b$. Найдем на отрезке AB точку Dтакую, что $AC = AD$. Тогда треугольник ACDравнобедренный и $\angle ACD = \angle ADC = 90° - \alpha/2$.Угол ADC – внешний угол треугольника CBD. Значит, $\angle BCD + \beta = \angle ADC = 90° - \frac{\alpha}{2} = \alpha + \beta$. Значит $\angle BCD = \alpha$, и треугольники$CDи$ ABCподобны. Имеем $\frac{BD}{BC} = \frac{BC}{AB}$ или $\frac{c-b}{a} = \frac{a}{c}$, откуда следует $a^2 + bc - c^2 = 0$. Квадратное уравнение $c^2 - 3c - 4 = 0$ имеет единственный положительный корень $c = 4$.
Ответ: 4.

12. Найти число матриц, удовлетворяющих двум условиям:

1) матрица имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & * & * \\ * & 1 & * \\ * & * & 1 \end{pmatrix}$, где каждая * может принимать значение 0 или 1

2) строки матрицы не повторяются.

Решение: Обозначим через A множество матриц, удовлетворяющих условию 1) и через B - подмножество множества A, состоящее из матриц, удовлетворяющих условию 2). Требуется найти число элементов множества B. Пусть $A_{ij}, i, j \in \{1,2,3\}, i \neq j,$ – подмножество множества A, состоящее из матриц, в которых совпадают строка i и j. Тогда $B = A \setminus (A_{12} \cup A_{23} \cup A_{13})$ и $|B| = |A| - |A_{12} \cup A_{23} \cup A_{13}|$.Мощность $|A_{12} \cup A_{23} \cup A_{13}|$ удобно вычисляется по формуле включения-исключения:

$|A_{12} \cup A_{23} \cup A_{13}| = |A_{12}| + |A_{23}| + |A_{13}| - |A_{12} \cap A_{23}| - |A_{13} \cap A_{23}| - |A_{12} \cap A_{13}| + |A_{12} \cap A_{23} \cap A_{13}|$.

Легко вычислить мощности множеств, фигурирующих в этом выражении:

$|A_{12}|=|A_{23}|=|A_{13}|=2^3$, $|A_{12}\cap A_{23}|=|A_{13}\cap A_{23}|=|A_{12}\cap A_{13}|=|A_{12}\cap A_{23}\cap A_{13}|=1$.

Получим $|B|=2^6-3\cdot 2^3+3-1=42$.

Ответ: 42