

1. Найдите все корни уравнения $\frac{1}{\cos^3 x} - \frac{1}{\sin^3 x} = 4\sqrt{2}$, лежащие на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$. Ответ записать в градусах.

Решение:

$$\sin^3 x - \cos^3 x = 4\sqrt{2} \sin^3 x \cos^3 x \Leftrightarrow (\sin x - \cos x)(\sin^2 x + \sin x \cos x + \cos^2 x) = 4\sqrt{2} \sin^3 x \cos^3 x.$$

Замена: $\sin x - \cos x = t$, $\sin x \cos x = \frac{1-t^2}{2}$. Тогда $t(3-t^2) = \sqrt{2}(1-t^2)^3$. Замена: $t = z\sqrt{2}$. Уравнение примет вид $z(3-2z^2) - (1-2z^2)^3 = 0$. Имеется корень $z = -1$, и левая часть может быть разложена

$$(z+1)(8z^5 - 8z^4 - 4z^3 + 2z^2 + 4z - 1) = 0. \quad (1)$$

Так как $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, то $t = \sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) < -1$. Следовательно, $z < -\frac{1}{\sqrt{2}}$. При таких

z многочлен пятой степени в левой части (1) принимает только отрицательные значения, так как $|8z^5| > |4z^3|$ и $|8z^4| > |2z^2|$. Поэтому $z = -1$ – единственный корень уравнения (1). Далее легко

найти, что $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -1$, и $x = -\frac{\pi}{4}$.

Ответ: -45

2. Имеется неограниченное количество пробирок трёх видов – А, В и С. Каждая из пробирок содержит один грамм раствора одного и того же вещества. В пробирках вида А содержится 10% раствор этого вещества, в пробирках В – 20% раствор и в С – 90% раствор. Последовательно, одну за другой, содержимое пробирок переливают в некоторую ёмкость. При этом при двух последовательных переливаниях нельзя использовать пробирки одного вида. Известно, что в ёмкости получили 20,17% раствор, выполнив при этом наименьшее количество переливаний. Какое наибольшее количество пробирок вида С может быть при этом использовано?

Решение: Пусть пробирок вида А, В и С взяли соответственно a, b и c штук. По условию

$0,1a + 0,2b + 0,9c = 0,2017 \cdot (a + b + c) \Leftrightarrow 1000 \cdot (a + 2b + 9c) = 2017 \cdot (a + b + c)$. Левая часть последнего равенства делится на 1000, следовательно на 1000 должна делиться и правая часть. Значит, наименьшее возможное значение суммы $a + b + c$ равно 1000. Покажем, что эта оценка достижима. То есть, докажем, что существуют неотрицательные целые числа a, b и c такие, что

$$\begin{cases} a + b + c = 1000 \\ a + 2b + 9c = 2017 \\ a \leq 500, b \leq 500, c \leq 500. \end{cases} \quad (1)$$

Последние три неравенства служат необходимым и достаточным условиям того, что удастся избежать использования пробирок одного вида при двух последовательных переливаниях.

Из первых двух уравнений системы (1) находим

$$a = 7c - 17, b = 1017 - 8c. \quad (2)$$

Подставив эти выражения в последние три неравенства системы (1), получим

$$7c \leq 517, 8c \geq 518, c \leq 500.$$

Отсюда наибольшее значение c равно 73. Ему соответствующие значения a и b могут быть найдены из (2). Они, очевидно, удовлетворяют неравенствам системы (1). Таким образом, разрешимость в неотрицательных целых числах системы (1) доказана.

Ответ: 73

3. Найти сумму квадратов натуральных делителей числа 1800. (Например, сумма квадратов натуральных делителей числа 4 равна $1^2 + 2^2 + 4^2 = 21$).

Решение: Пусть $\sigma(N)$ – сумма квадратов натуральных делителей натурального числа N . Заметим, что для любых двух взаимно простых натуральных чисел a и b справедливо равенство: $\sigma(ab) = \sigma(a) \cdot \sigma(b)$. Действительно, любой делитель произведения ab есть произведение делителя a и делителя b . И наоборот: умножив делитель a на делитель b , получим делитель произведения ab . Это же, очевидно, верно и для квадратов делителей (квадрат делителя произведения равен произведению квадратов делителей сомножителей и наоборот).

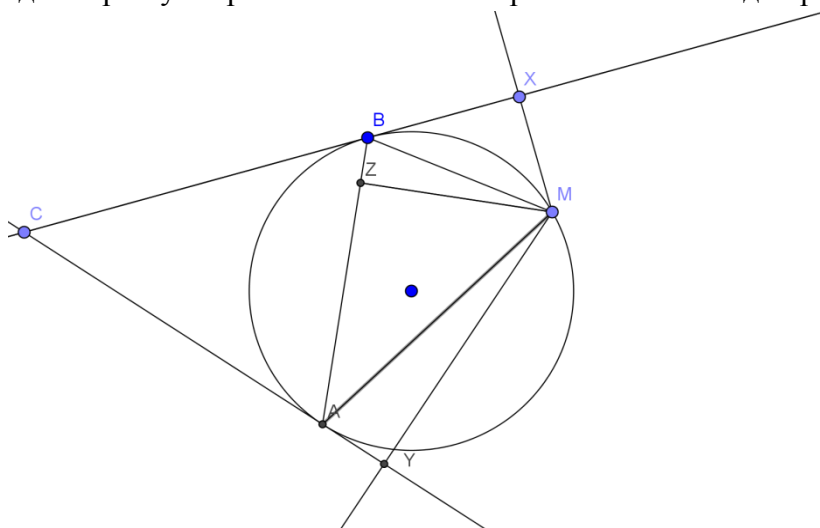
Рассмотрим разложение числа N на простые множители: $N = p_1^{k_1} \cdot \dots \cdot p_n^{k_n}$. Здесь p_i – попарно различные простые числа, и все $k_i \in \mathbb{N}$. Тогда $\sigma(N) = \sigma(p_1^{k_1}) \cdot \dots \cdot \sigma(p_n^{k_n})$ и

$\sigma(p^k) = 1 + p^2 + p^4 + \dots + p^{2k}$. Поскольку $1800 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2$, то

$$\sigma(1800) = (1 + 2^2 + 2^4 + 2^6) \cdot (1 + 3^2 + 3^4) \cdot (1 + 5^2 + 5^4) = 5035485.$$

Ответ: 5035485.

4. Окружность касается сторон угла в точках A и B . На окружности выбрана точка M . Расстояния от M до сторон угла равны 24 и 6. Найти расстояние от M до прямой AB .



Решение: $\angle XBM = \angle ZAM = \frac{1}{2}\widehat{BM}$, следовательно, треугольники BMX и ZAM подобны, поэтому $\frac{XM}{ZM} = \frac{BM}{AM}$. $\angle ABM = \angle YAM = \frac{1}{2}\widehat{AM}$, следовательно, треугольники AMY и BMZ подобны, поэтому $\frac{YM}{ZM} = \frac{AM}{BM}$. Отсюда

$$\text{ZM}^2 = \text{XM} \cdot \text{YM} = 24 \cdot 6 = 144, \quad \text{ZM} = 12.$$

Ответ: 12

5. Известно, что многочлен $f(x) = 8 + 32x - 12x^2 - 4x^3 + x^4$ имеет 4 различных действительных корня $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Многочлен вида $g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + x^4$ имеет корни $\{x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_4^2\}$.

Найти коэффициент b_1 многочлена $g(x)$.

Решение: Обозначим коэффициенты заданного многочлена (кроме старшего) через a_0, a_1, a_2, a_3 :
 $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + x^4$.

Тогда по условию задачи имеем:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + x^4 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4).$$

Вместе с многочленом $f(x)$ рассмотрим многочлен $h(x)$, имеющий корни $\{-x_1, -x_2, -x_3, -x_4\}$:

$$h(x) = (x + x_1)(x + x_2)(x + x_3)(x + x_4) = a_0 - a_1x + a_2x^2 - a_3x^3 + x^4.$$

Рассмотрим многочлен $G(\mathbb{F}) = f(x)h(x)$:

$$G(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)(x + x_1)(x + x_2)(x + x_3)(x + x_4) = \\ = (x^2 - x_1^2)(x^2 - x_2^2)(x^2 - x_3^2)(x^2 - x_4^2).$$

Заменой переменной $y = x^2$ получаем требуемый многочлен $g(y)$, поскольку

$$g(y) = (y - x_1^2)(y - x_2^2)(y - x_3^2)(y - x_4^2).$$

В нашем случае:

$$f(x) = 8 + 32x - 12x^2 - 4x^3 + x^4, \\ h(x) = 8 - 32x - 12x^2 + 4x^3 + x^4, \\ \mathcal{G}(x) = f(x)h(x) = 64 - 1216x^2 + 416x^4 - 40x^6 + x^8, \\ g(y) = 64 - 1216y + 416y^2 - 40y^3 + y^4.$$

Ответ: -1216

6. Найти число матриц, удовлетворяющих двум условиям:

3) матрица имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & * & * \\ * & 1 & * \\ * & * & 1 \end{pmatrix}$, где каждая * может

принимать значение 0 или 1

4) строки матрицы не повторяются.

Решение: Обозначим через A множество матриц, удовлетворяющих условию 1) и через B - подмножество множества A , состоящее из матриц, удовлетворяющих условию 2). Требуется найти число элементов множества B . Пусть $A_{ij}, i, j \in \{1, 2, 3\}, i \neq j$, - подмножество множества A ,

состоящее из матриц, в которых совпадают строка i и j . Тогда $B = A \setminus (A_{12} \cup A_{23} \cup A_{13})$ и

$|B| = |A| - |A_{12} \cup A_{23} \cup A_{13}|$. Мощность $|A_{12} \cup A_{23} \cup A_{13}|$ удобно вычисляется по формуле включения-исключения:

$$|A_{12} \cup A_{23} \cup A_{13}| = |A_{12}| + |A_{23}| + |A_{13}| - |A_{12} \cap A_{23}| - |A_{13} \cap A_{23}| - |A_{12} \cap A_{13}| + |A_{12} \cap A_{23} \cap A_{13}|.$$

Легко вычислить мощности множеств, фигурирующих в этом выражении:

$$|A_{12}| = |A_{23}| = |A_{13}| = 2^3, |A_{12} \cap A_{23}| = |A_{13} \cap A_{23}| = |A_{12} \cap A_{13}| = |A_{12} \cap A_{23} \cap A_{13}| = 1.$$

Получим $|B| = 2^6 - 3 \cdot 2^3 + 3 - 1 = 42$.