9 КЛАСС

Вариант 1

1. Сравните числа $(10^{2017}+10^{2016}+\dots+10+1)^{2018}$ и $(10^{2018}+10^{2017}+\dots+10+1)^{2017}$.

Решение. Обозначим

$$A=(10^{2017}+10^{2016}+\dots+10+1)^{2018},\qquad B=(10^{2018}+10^{2017}+\dots+10+1)^{2017}.$$

Пользуясь формулой для суммы членов геометрической прогрессии, находим:

$$A=\frac{(10^{2018}-1)^{2018}}{9^{2018}},\qquad B=\frac{(10^{2019}-1)^{2017}}{9^{2017}}.$$

Обозначим $a=10^{2018}$. Оценим разность:

$$A-B=9^{-2018}\cdot((a-1)^{2018}-9\cdot(10a-1)^{2017})=9^{-2018}\cdot C.$$

Здесь $C=(a-1)^{2018}-9\cdot(10a-1)^{2017}$. Определим знак C. Увеличим вычитаемое, заменив $10a-1$ на $10a$:

$$C>(a-1)^{2018}-9\cdot(10a)^{2017}=(a-1)^{2018}-0{,}9\cdot a^{2018}.$$

Знак последнего выражения, очевидно, совпадает со знаком разности $\left(\frac{a-1}{a}\right)^{2018}-0{,}9$. Заметим, что $\frac{a-1}{a}>\frac{a-2}{a-1}>\frac{a-3}{a-2}>\dots>\frac{a-2018}{a-2017}$. Следовательно,

$$\left(\frac{a-1}{a}\right)^{2018}>\frac{a-1}{a}\cdot\frac{a-2}{a-1}\cdot\frac{a-3}{a-2}\cdot\ldots\cdot\frac{a-2018}{a-2017}=\frac{a-2018}{a}.$$

Далее, $\frac{a-2018}{a}>0{,}9$, так как $0{,}1\cdot a>2018$. Следовательно, разность $\left(\frac{a-1}{a}\right)^{2018}-0{,}9$, а вместе с ней и C положительны. Следовательно, первое число больше второго.

Ответ: Первое число больше второго.

2. Найдите все четные натуральные числа n у которых число делителей (включая 1 и само n) равно $\frac{n}{2}$. (Например, число 12 имеет 6 делителей: 1,2,3,4,6,12.)

Решение. Пусть каноническое разложение числа n имеет вид: $n=2^{t_1}\cdot 3^{t_2}\cdot 5^{t_3}\cdot\ldots\cdot p^{t_k}$. Тогда количество делителей числа n равно $(t_1+1)(t_2+1)(t_3+1)\cdots(t_k+1)$. Из условия задачи имеем равенство:

$(t_1+1)(t_2+1)(t_3+1)\cdots(t_k+1)=2^{t_1-1}\cdot 3^{t_2}\cdot 5^{t_3}\cdot\ldots\cdot p^{t_k}$. (*)

Заметим, что $2^{t_1-1}>t_1+1$ при $t_1\ge 4$, $3^{t_2}>t_2+1$ при $t_2\ge 1$, …, $p^{t_k}>t_k+1$ при $t_k\ge 1$. Следовательно, t_1 может принимать значения 1, 2 или 3. Подставляя указанные значения в равенство (*), найдём, что $n=8$ или $n=12$.

Ответ: $\{8,12\}$.

3. Сколькими способами из первых n натуральных чисел $1,2,\dots,n$ можно выбрать 4 числа, образующих возрастающую арифметическую прогрессию?

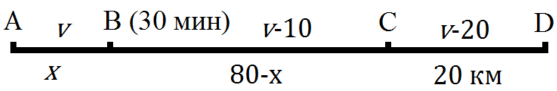
Решение. Количество прогрессий с разностью 1 равно $n-3$ (первый член прогрессии может принимать значения от 1 до $n-3$ включительно), количество прогрессий с разностью 2 равно $n-6$, … , количество прогрессий с разностью d равно $n-3d$. Разность d удовлетворяет неравенству $1+3d\le n$ (если первый член прогрессии равен 1, то ее четвертый член, $1+3d$, не превосходит

n). Поэтому наибольшее значение разности равно $d_{max} = \left[\frac{n-1}{3}\right]$ (квадратные скобки обозначают целую часть числа). Следовательно, количество прогрессий, удовлетворяющих условию задачи, равно:

$$(n-3)+(n-6)+\cdots+(n-3k)=\frac{(2n-3k-3)k}{2}, \text{где } k = d_{max}.$$

Ответ: $\frac{(2n-3k-3)k}{2}$, где $k = \left[\frac{n-1}{3}\right]$.

4. Из пункта A в пункт D, расстояние между которыми равно 100 км, выехал автомобилист. Дорога из A в D проходит через пункты B и C. В пункте B навигатор показал, что ехать осталось 30 мин, и автомобилист тут же снизил скорость на 10 км/ч. В пункте C навигатор показал, что ехать осталось 20 км, и автомобилист сразу же второй раз снизил скорость на те же 10 км/ч. (Навигатор определяет оставшееся время на основании текущей скорости движения.) Определите первоначальную скорость автомобиля, если известно, что на путь из B в C он потратил на 5 мин больше времени, чем на путь из C в D.



Решение. По условию, расстояние от C до D равно 20 км. Обозначим расстояние от A до B через x (км), тогда расстояние от B до C составит $(80-x)$ км. Пусть $v\frac{\text{км}}{\text{ч}}$ – первоначальная скорость автомобиля. Тогда на участках BC и CD она равна $(v-10)\frac{\text{км}}{\text{ч}}$ и $(v-20)\frac{\text{км}}{\text{ч}}$, соответственно. По условию, путь от B до D занял бы полчаса, если бы автомобиль продолжал двигаться со скоростью $v\frac{\text{км}}{\text{ч}}$, то есть

$$100-x=\frac{v}{2}. \qquad (1)$$

Далее, на путь из B в C он потратил на 5 мин больше времени, чем на путь из C в D:

$$\frac{80-x}{v-10}-\frac{20}{v-20}=\frac{1}{12}. \qquad (2)$$

Выразив x из первого уравнения и подставив во второе, получим уравнение для определения v:

$$\frac{\frac{v}{2}-20}{v-10}-\frac{20}{v-20}=\frac{1}{12},$$

которое имеет корни 14 и 100. Корень 14, очевидно, посторонний, так как $v > 20$.

Ответ: $100\frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

5. Про натуральные числа a, b, c известно следующее:

- a^b делится на c;
- b^c делится на a;
- c^a делится на b.

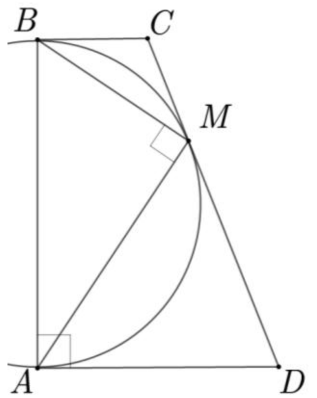
Докажите, что $(a+b+c)^{a+b+c}$ делится на произведение abc.

Решение.

Пусть p – простой делитель числа a. Тогда из 2-го условия следует, что b делится на p, а из 3-го – что c делится на p. Следовательно, $(a+b+c)^{a+b+c}$ делится на p^{a+b+c}. Пусть n, k, t – наибольшие натуральные числа такие, что a делится на p^n, b делится на p^k, c делится на p^t. Значит, в каноническое разложение произведения abc простое число p входит в степени $n+k+t$. Но, очевидно, $a > n$, $b > k$, $c > t$. Поэтому $a+b+c > n+k+t$ и, следовательно, число $(a+b+c)^{a+b+c}$ делится на p^{n+k+t}. Рассмотрев подобным образом остальные простые делители чисел a, b, c, получим требуемое утверждение.

6. В трапеции $ABCD$ с основаниями BCи AD угол DAB прямой. Известно, что на стороне CD существует единственная точка M такая, что угол BMA прямой.

Докажите, что $BC = CM$ и $AD = MD$.



Решение. Построим на стороне AB как на диаметре окружность. Так как угол BMA прямой, то точка M лежит на этой окружности. Так как такая точка M единственная на стороне CD, то CD – касательная к окружности. Следовательно, $BC = CM$ и $AD = MD$.

7. Известно, что существует натуральное число N такое, что

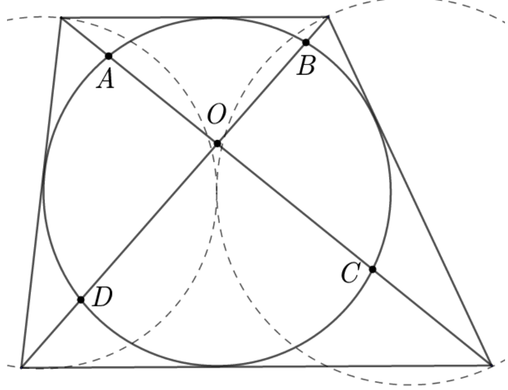
$$\left(\sqrt{3}-1\right)^N = 4817152 - 2781184 \cdot \sqrt{3}.$$

Найдите N.

Решение. Предположим, что, возведя число $a + b\sqrt{3}$ в степень N, мы получили число $A + B\sqrt{3}$ (здесь a, b, A, B – целые). Раскрыв скобки в выражении $\left(a + b\sqrt{3}\right)^N$, получим сумму одночленов (с для нас сейчас несущественными целыми коэффициентами) вида $a^{N-n}\left(b\sqrt{3}\right)^n$. Вклад в коэффициент B дадут те одночлены, у которых показатель n нечетен. Поэтому, если $\left(a + b\sqrt{3}\right)^N = A + B\sqrt{3}$, то $\left(a - b\sqrt{3}\right)^N = A - B\sqrt{3}$. Перемножив равенства $\left(\sqrt{3}-1\right)^N = 4817152 - 2781184 \cdot \sqrt{3}$ и $\left(-\sqrt{3}-1\right)^N = 4817152 + 2781184 \cdot \sqrt{3}$, получим $(-2)^N = 4817152^2 - 3 \cdot 2781184^2$. Показатель N найдем, деля обе части последовательно на 2 (можно, например сразу поделить каждое слагаемое справа на 256).

Ответ: $N = 16$.

8. Вписанная в трапецию окружность пересекает ее диагонали в точках A, B, C, D. Докажите, что сумма длин дуг $\overset{\frown}{BA} + \overset{\frown}{DC}$ больше суммы длин дуг $\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{CB}$.



Решение. Пусть O – точка пересечения диагоналей. Известно, что величина угла AOD равна полусумме угловых мер дуг $\overset{\frown}{CB}$ и $\overset{\frown}{AD}$. В задаче по сути требуется доказать, что сумма длин дуг $\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{CB}$ меньше длины половины окружности, то есть их суммарная угловая мера меньше 180^0, что эквивалентно тому, что угол AOD острый. Для обоснования последнего построим (как на диаметрах) окружности на боковых сторонах трапеции (рис.). Углы AOD и BOC, под которыми из точки O видны боковые стороны, равны между собой. Значит, возможен один из трех случаев: 1) точка O находится внутри каждой из окружностей, если углы AOD и BOC тупые, 2) точка O лежит на каждой из окружностей, если углы прямые, 3) точка O лежит вне окружностей, если углы острые. Но, поскольку наша трапеция описанная, сумма длин боковых сторон равна сумме длин оснований, а значит сумма радиусов этих окружностей равна полусумме оснований, то есть средней линии. Потому окружности имеют *единственную общую точку*, лежащую как раз на средней линии и потому отличную от O (так как длины оснований трапеции различны). Таким образом, реализуется третий случай: углы AOD и BOC острые, и, следовательно, сумма длин дуг $\breve{BA} + \breve{DC}$ больше суммы длин дуг $\breve{AD} + \breve{CB}$. Утверждение доказано.