11 КЛАСС

Вариант 1

1. Решите уравнение $x^2 - 2x \cdot \sin(x \cdot y) + 1 = 0$.

Решение. Левую часть уравнения будем интерпретировать как квадратный трехчлен относительно x. Чтобы корни существовали, дискриминант должен быть неотрицательным, т.е. $D = 4sin^2(x \cdot y) - 4 \geq 0 \Leftrightarrow sin^2(x \cdot y) = 1 \Leftrightarrow \cos 2xy = -1 \Leftrightarrow xy = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. Для четных n получаем уравнение $x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$, а для нечетных n находим $x = -1$. Левая часть уравнения – четная функция x, поэтому для $x = 1$ и для $x = -1$ соответствующие значения y будут одними и теми же.

Ответ: $\left(\pm 1, \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right),\ k \in \mathbb{Z}$.

2. Натуральные числа от 1 до 100 записали подряд без пробелов. Затем, между некоторыми цифрами поместили знак плюс. (Например, $1234567 + 891011 \dots 15 + 1617 \dots 99100.$) Может ли получившаяся в результате сумма делиться на 111?

Решение. Остаток от деления числа на три равен остатку от деления на три суммы его цифр. Значит, сумма остатков от деления на три всех чисел, разделенных знаками плюс, равна остатку от деления на 3 суммы всех цифр у чисел от 1 до 100. В свою очередь, эта сумма цифр дает при делении на 3 тот же остаток, что и сумма $1 + \dots + 100 = 5050$. Так как 5050 на три не делится, то на 3 не делится и сумма из условия задачи. Если число не делится на 3, то оно не делится и на 111.

Ответ: нет

3. Сравните числа $(10^{2017} + 10^{2016} + \dots + 10 + 1)^{2018}$ и $(10^{2018} + 10^{2017} + \dots + 10 + 1)^{2017}$.

Решение. Обозначим

$$A = (10^{2017} + 10^{2016} + \dots + 10 + 1)^{2018}, \qquad B = (10^{2018} + 10^{2017} + \dots + 10 + 1)^{2017}.$$

Пользуясь формулой для суммы членов геометрической прогрессии, находим:

$$A = \frac{(10^{2018} - 1)^{2018}}{9^{2018}}, \qquad B = \frac{(10^{2019} - 1)^{2017}}{9^{2017}}.$$

Обозначим $a = 10^{2018}$. Оценим разность:

$$A - B = 9^{-2018} \cdot ((a-1)^{2018} - 9 \cdot (10a - 1)^{2017}) = 9^{-2018} \cdot C.$$

Здесь $C = (a-1)^{2018} - 9 \cdot (10a - 1)^{2017}$. Определим знак C. Увеличим вычитаемое, заменив $10a - 1$ на $10a$:

$$C > (a-1)^{2018} - 9 \cdot (10a)^{2017} = (a-1)^{2018} - 0{,}9 \cdot a^{2018}.$$

Знак последнего выражения, очевидно, совпадает со знаком разности $\left(\frac{a-1}{a}\right)^{2018} - 0{,}9$. Заметим, что $\frac{a-1}{a} > \frac{a-2}{a-1} > \frac{a-3}{a-2} > \dots > \frac{a-2018}{a-2017}$. Следовательно,

$$\left(\frac{a-1}{a}\right)^{2018} > \frac{a-1}{a} \cdot \frac{a-2}{a-1} \cdot \frac{a-3}{a-2} \cdot \ldots \cdot \frac{a-2018}{a-2017} = \frac{a-2018}{a}.$$

Далее, $\frac{a-2018}{a} > 0{,}9$, так как $0{,}1 \cdot a > 2018$. Следовательно, разность $\left(\frac{a-1}{a}\right)^{2018} - 0{,}9$, а вместе с ней и C положительны. Следовательно, первое число больше второго.

Ответ: Первое число больше второго.

4. Основанием треугольной пирамиды $SABC$ служит правильный треугольник ABC со стороной 4. Известно, что для произвольной точки M на продолжении высоты пирамиды SH (точка S находится между точками M и H) углы MSA, MSB, MSC, ASB, ASC и BSC равны между собой. Построен шар радиуса 1 с центром в точке S. Найдите объём общей части пирамиды $SABC$ и шара (объём шара радиуса R вычисляется по формуле $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.)

Решение. Выберем точку M (из условия задачи) так, что $MA = 4$. Тогда точка S будет являться центром описанного шара около правильного тетраэдра $MABC$. Следовательно, каждая из четырёх одинаковых пирамид $SABC, SMAB, SMAC, SABC$ будет отсекать от шара радиуса 1 с центром в точке S одинаковую часть. Нетрудно подсчитать, что расстояние от точки S до плоскости ABC равно $\frac{\sqrt{6}}{3}$. Так как $\frac{\sqrt{6}}{3} < 1$, то для нахождения объёма общей части пирамиды $SABC$ и шара радиуса $R = 1$ с центром в точке S нужно из четверти объёма шара $\frac{1}{3}\pi R^3$ вычесть объём шарового сегмента высотой $h = 1 - \frac{\sqrt{6}}{3}$. Как известно, последний находится по формуле $V_c = \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3}\right)$. Для $R = 1,\ h = 1 - \frac{\sqrt{6}}{3}$ получаем $V_c = \pi \cdot \frac{18-7\sqrt{6}}{27}$. Отсюда искомый объём равен $\pi \cdot \frac{7\sqrt{6}-9}{27}$.

Ответ: $\pi \cdot \frac{7\sqrt{6}-9}{27}$.

5. Докажите, что для любого натурального числа n существует натуральное число N такое, что произведение $9 \cdot 5^n \cdot N$ представляет собой *палиндром*, то есть число, десятичная запись которого справа налево и слева направо читается одинаково. Например, для $n = 1$ можно взять $N = 13$, так как $9 \cdot 5^1 \cdot 13 = 585$.

Решение. Будем использовать следующий факт. Пусть натуральное число B делится на 5^n, а его десятичная запись содержит не менее n цифр, то есть $B = b_{m-1}b_{m-2} \cdots b_1 b_0$ и $m \geq n$. Тогда, приписав к десятичной записи числа B произвольные цифры слева, вновь получим делящееся на 5^n число, а именно: число $A = a_{k-1}a_{k-2} \cdots a_0 b_{m-1}b_{m-2} \cdots b_1 b_0$ также делится на 5^n, так как $A = 10^m \cdot a_{k-1}a_{k-2} \cdots a_0 + B$.

Пусть десятичная запись числа 5^n имеет вид $a_{k-1} \cdots a_1 a_0$. Очевидно, что $n \geq k$. Существует нечётное число C такое, что десятичная запись произведения $C \cdot 5^n = b_{m-1}b_{m-2} \cdots b_1 b_0$ содержит более n цифр. Например, $C = 2^n + 1$, тогда $C \cdot 5^n > 10^n$, а запись числа 10^n содержит $n + 1$ цифру. (Из нечетности C следует неравенство $b_0 \neq 0$, что далее существенно.)

Рассмотрим число-палиндром $V = b_0 b_1 \cdots b_{m-2} b_{m-1} x b_{m-1} b_{m-2} \cdots b_1 b_0$, в котором цифру x выберем так, чтобы сумма всех цифр числа V делилась на 9 (тогда и само V делится на 9). Согласно рассуждениям выше, число V делится на 5^n, а значит, для $N = \frac{V}{9 \cdot 5^n}$ справедливо равенство $V = 9 \cdot 5^n \cdot N$. Таким образом, существование натурального N доказано

6. При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{(x-6)^2+(y-13)^2}+\sqrt{(x-18)^2+(y-4)^2}=15 \\ (x-2a)^2+(y-4a)^2=\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

имеет единственное решение?

Решение.

Первое уравнение системы задает ГМТ точек $M(x,y)$ на плоскости сумма расстоянийот которых до точек $A(6,13)$ и $B(18,4)$ равна 15. Заметим, что

$$|AB|=\sqrt{12^2+9^2}=15.$$

Поэтому согласно неравенству треугольника, ГМТ таких точек $M(x,y)$ суть точки отрезка AB.

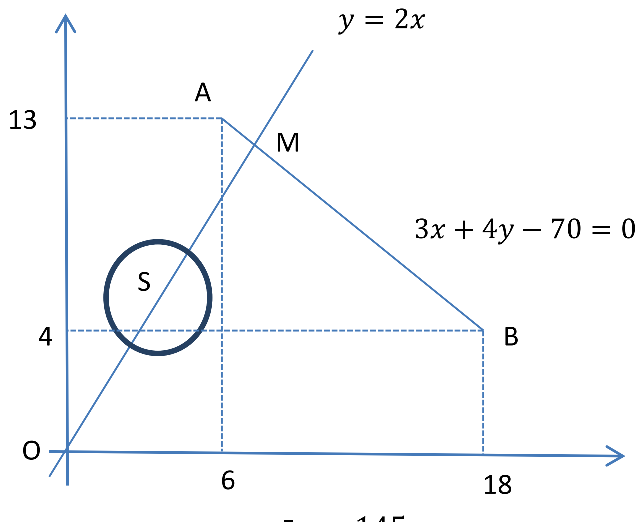
Второе уравнение есть уравнение окружности с центром в точке $S(2a,4a)$ радиуса $\frac{1}{2}$.

Единственность решения системы возможна в том и только в том случае, когда окружность пересекает отрезок AB ровно в одной точке.

Очевидно, что гарантированно единственная точка пересечения будет в случае касания окружности отрезком. Это произойдет тогда, когда расстояние от точки $S(2a,4a)$ до прямой, содержащей отрезок AB, будет равно радиусу окружности, и точка касания будет попадать в отрезок AB. Уравнение прямой, содержащей AB, как нетрудно установить, имеет вид $3x+4y-70=0$. Согласно формуле расстояния от точки до прямой (один из вариантов решения):

$$\frac{|3\cdot 2a+4\cdot 4a-70|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{1}{2}.$$

Отсюда получим два возможных значения параметра a:



$$\left[\begin{array}{l} a=\dfrac{145}{44}, \\ a=\dfrac{135}{44}. \end{array}\right.$$

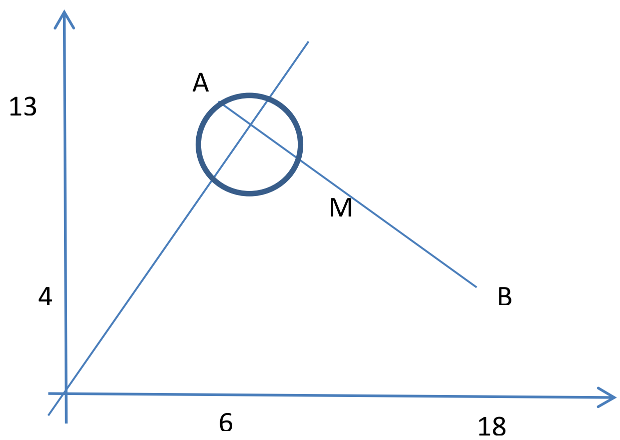
Центр окружности лежит на прямой $y=2x$.Точка $M\left(\frac{70}{11},\frac{140}{11}\right)$ пересечения прямых $y=2x$ и $3x+4y-70=0$ лежит на отрезке AB. Угол OMBострый, поэтому точка касания прямой $3x+4y-70=0$ и окружности, центр которой лежит под отрезком AB, заведомо на отрезок AB попадет. Это происходит при $a=\frac{135}{44}$. Если же цент S окружности лежит выше отрезка AB (это происходит при $a = \frac{145}{44}$), то требуются дополнительные рассуждения. Точка касания H есть проекция точки $S\left(\frac{145}{22}, \frac{145}{11}\right)$на прямую, содержащую отрезок AB. H попадет в отрезок AM, если $MH \leq AM$. Имеем:

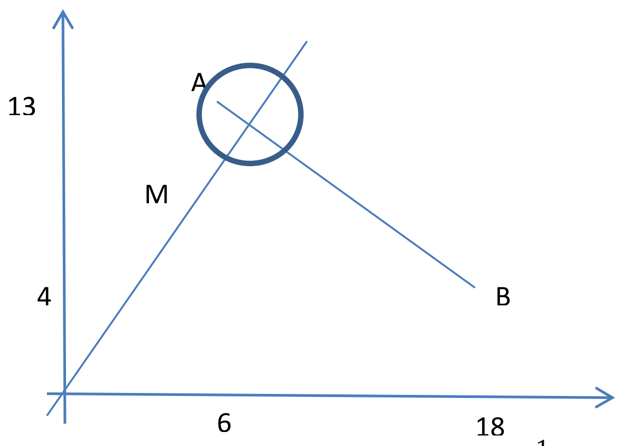
$$MH = \sqrt{SM^2 - SH^2} = \sqrt{\left(\frac{145}{22} - \frac{70}{11}\right)^2 + \left(\frac{145}{11} - \frac{140}{11}\right)^2 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{11},$$

$$AM = \sqrt{\left(\frac{70}{11} - 6\right)^2 + \left(\frac{140}{11} - 13\right)^2} = \frac{5}{11}.$$

Следовательно $MH < AM$, и точка касания H лежит на отрезке AB.

В то же время, поскольку $AM < \frac{1}{2}$, постольку единственность решения возможна, когда окружность пересекает отрезок AB, но при этом точка A попадает во внутрь круга. Так будет происходить с момента пересечения окружности и отрезка в точке A до момента повторного пересечения в той же точке A (не включая данные моменты).





Найдем такие положения точки $S(2a, 4a)$, при которых расстояние от нее до точки A равно $\frac{1}{2}$. Имеем:

$$(2a - 6)^2 + (4a - 13)^2 = \frac{1}{4}.$$

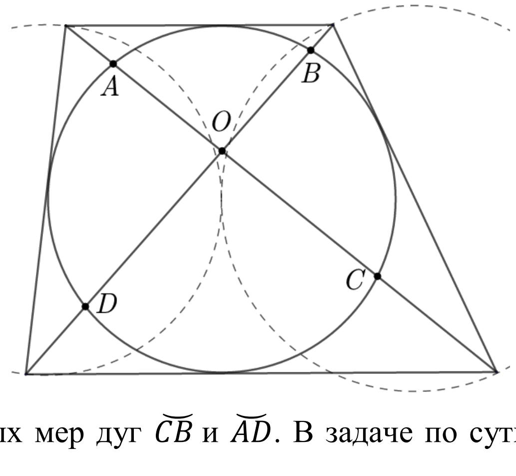
Отсюда

$$\left[\begin{aligned} a &= \frac{13}{4}, \\ a &= \frac{63}{20}. \end{aligned}\right.$$

Значит, при $a \in \left(\frac{63}{20}, \frac{13}{4}\right)$точка пересечения будет единственна, как и решение системы уравнений. Окончательно получим

Ответ: $a = \frac{145}{44}, a = \frac{135}{44}, a \in \left(\frac{63}{20}, \frac{13}{4}\right)$.

7. Вписанная в трапецию окружность пересекает ее диагонали в точках A, B, C, D. Докажите, что сумма длин дуг $\breve{BA} + \breve{DC}$ больше суммы длин дуг $\breve{AD} + \breve{CB}$.



Решение. Пусть O – точка пересечения диагоналей. Известно, что величина угла AOD равна полусумме угловых мер дуг $\breve{CB}$ и $\breve{AD}$. В задаче по сути требуется доказать, что сумма длин дуг $\breve{AD} + \breve{CB}$ меньше длины половины окружности, то есть их суммарная угловая мера меньше 180^0, что эквивалентно тому, что угол AOD острый. Для обоснования последнего построим (как на диаметрах) окружности на боковых сторонах трапеции (рис.). Углы AOD и BOC, под которыми из точки O видны боковые стороны, равны между собой. Значит, возможен один из трех случаев: 1) точка O находится внутри каждой из окружностей, если углы AOD и BOC тупые, 2) точка O лежит на каждой из окружностей, если углы прямые, 3) точка O лежит вне окружностей, если углы острые. Но, поскольку наша трапеция описанная, сумма длин боковых сторон равна сумме длин оснований, а значит сумма радиусов этих окружностей равна полусумме оснований, то есть средней линии. Потому окружности имеют *единственную общую точку*, лежащую как раз на средней линии и потому отличную от O (так как длины оснований трапеции различны). Таким образом, реализуется третий случай: углы AOD и BOC острые, и, следовательно, сумма длин дуг $\breve{BA} + \breve{DC}$ больше суммы длин дуг $\breve{AD} + \breve{CB}$. Утверждение доказано.

8. Известно, что для любого натурального числа n верна формула:

$$\cos(n\alpha) = 2^{n-1} \cdot (cos\alpha)^n + a_{n-1} \cdot (cos\alpha)^{n-1} + a_{n-2} \cdot (cos\alpha)^{n-2} + \cdots + a_1 \cdot (cos\alpha) + a_0.$$

Здесь a_k – целые числа, и $a_0 = 0$ при нечётном n. Докажите, что при $n \geq 4$ числа $\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$ и $\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$ иррациональны.

Решение. При доказательстве будем пользоваться следующим утверждением: если рациональное число $t = \frac{p}{q}$ (p и q – взаимно простые целые числа) является корнем многочлена $f(x) = a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots a_1 x + a_0$ с целыми коэффициентами ($a_i \in \mathbb{Z}$), то p является делителем a_0, а q – делителем a_k. Предположим, что $\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$ – рациональное число (при некотором $n \geq 4$).

1) Пусть n кратно 4, то есть $n = 4t, t \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4} = \cos\left(t\frac{\pi}{n}\right) = \cos\left(t\frac{\pi}{4t}\right) =$$

$$= 2^{t-1} \cdot (cos\frac{\pi}{n})^t + a_{t-1} \cdot (cos\frac{\pi}{n})^{t-1} + a_{t-2} \cdot (cos\frac{\pi}{n})^{t-2} + \cdots + a_1 \cdot \left(cos\frac{\pi}{n}\right) + a_0.$$

Такое равенство невозможно, так как левая часть – иррациональное число $\frac{\sqrt{2}}{2}$, тогда как значение правой части рационально.

2) Пусть n – нечётное число и $n \geq 5$. Тогда

$$-1 = \cos\pi = \cos\left(n\frac{\pi}{n}\right) =$$

$$= 2^{n-1} \cdot (cos\tfrac{\pi}{n})^n + a_{n-1} \cdot (cos\tfrac{\pi}{n})^{n-1} + a_{n-2} \cdot (cos\tfrac{\pi}{n})^{n-2} + \cdots + a_1 \cdot \left(cos\tfrac{\pi}{n}\right).$$

Тогда $\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$ – рациональный корень многочлена $2^{n-1} \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_{n-2} \cdot x^{n-2} + \cdots + a_1 \cdot x + 1$, и, по сформулированному выше утверждению, $\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{1}{2^m}$, где $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Но то невозможно, так как при $n \geq 5$ выполняется неравенство $\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) > \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2^m}$. Вновь получено противоречие.

3) Пусть, наконец, n чётно и не кратно 4. Тогда n имеет нечётный делитель p, то есть $n = pt$, p – нечетное число; более того, если $n \notin \{2{,}6\}$, то всегда можно выбрать p так, что $p \geq 5$. Тогда

$$\cos\frac{\pi}{p} = \cos\left(t\frac{\pi}{n}\right) =$$

$$= 2^{t-1} \cdot (cos\frac{\pi}{n})^t + a_{tn-1} \cdot (cos\frac{\pi}{n})^{t-1} + a_{t-2} \cdot (cos\frac{\pi}{n})^{t-2} + \cdots + a_1 \cdot \left(cos\frac{\pi}{n}\right) + a_0.$$

В предыдущем пункте доказано, что число $\cos\frac{\pi}{p}$ иррационально. Значит число $\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$ также иррационально, ибо в противном случае рациональной была бы и правая часть последнего равенства.

Таким образом, для всех натуральных $n \geq 4$ показано, что $\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$ – иррациональное число.

Покажем, что для всех натуральных $n \geq 4$, $n \neq 6$ число $sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$ иррационально. Предположим, что при некотором n $sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$ – рациональное число.

1) Пусть n – чётное число, $n = 2k, k \geq 4$. Тогда $\cos\frac{\pi}{k} = \cos 2\frac{\pi}{n} = 1 - 2sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)$. По доказанному, число $\cos\left(\frac{\pi}{k}\right)$ иррационально, следовательно иррационально и число $sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$.

2) Пусть n нечётно. Аналогично первой части рассуждений доказывается иррациональность числа $\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)$, $n \geq 8$. Далее из равенства $\cos\frac{2\pi}{n} = 1 - 2sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)$ следует иррациональность числа $sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$.