

10 КЛАСС

Вариант 1

1. Сравните числа

$$(10^{2017} + 10^{2016} + \dots + 10 + 1)^{2018} \text{ и } (10^{2018} + 10^{2017} + \dots + 10 + 1)^{2017}.$$

Решение. Обозначим

$$A = (10^{2017} + 10^{2016} + \dots + 10 + 1)^{2018}, \quad B = (10^{2018} + 10^{2017} + \dots + 10 + 1)^{2017}.$$

Пользуясь формулой для суммы членов геометрической прогрессии, находим:

$$A = \frac{(10^{2018} - 1)^{2018}}{9^{2018}}, \quad B = \frac{(10^{2019} - 1)^{2017}}{9^{2017}}.$$

Обозначим

$$a = 10^{2018}.$$

Оценим

разность:

$$A - B = 9^{-2018} \cdot ((a - 1)^{2018} - 9 \cdot (10a - 1)^{2017}) = 9^{-2018} \cdot C.$$

Здесь $C = (a - 1)^{2018} - 9 \cdot (10a - 1)^{2017}$. Определим знак C . Увеличим вычитаемое, заменив $10a - 1$ на $10a$:

$$C > (a - 1)^{2018} - 9 \cdot (10a)^{2017} = (a - 1)^{2018} - 0,9 \cdot a^{2018}.$$

Знак последнего выражения, очевидно, совпадает со знаком разности $\left(\frac{a-1}{a}\right)^{2018} - 0,9$. Заметим,

что $\frac{a-1}{a} > \frac{a-2}{a-1} > \frac{a-3}{a-2} > \dots > \frac{a-2018}{a-2017}$. Следовательно,

$$\left(\frac{a-1}{a}\right)^{2018} > \frac{a-1}{a} \cdot \frac{a-2}{a-1} \cdot \frac{a-3}{a-2} \cdot \dots \cdot \frac{a-2018}{a-2017} = \frac{a-2018}{a}.$$

Далее, $\frac{a-2018}{a} > 0,9$, так как $0,1 \cdot a > 2018$. Следовательно, разность $\left(\frac{a-1}{a}\right)^{2018} - 0,9$, а вместе с ней и C положительны. Следовательно, первое число больше второго.

Ответ: Первое число больше второго.

2. Найдите все кратные трем натуральные числа n , у которых число делителей (включая 1 и само n) равно $\frac{n}{3}$. (Например, число 12 имеет 6 делителей: 1, 2, 3, 4, 6, 12.)

Ответ: {18, 24}

3. Сколькими способами из первых n натуральных чисел $1, 2, \dots, n$ можно выбрать 4 числа, образующих возрастающую арифметическую прогрессию?

Решение. Количество прогрессий с разностью 1 равно $n - 3$ (первый член прогрессии может принимать значения от 1 до $n - 3$ включительно), количество прогрессий с разностью 2 равно $n - 6$, ..., количество прогрессий с разностью d равно $n - 3d$. Разность d удовлетворяет неравенству $1 + 3d \leq n$ (если первый член прогрессии равен 1, то ее четвертый член, $1 + 3d$, не превосходит n). Поэтому наибольшее значение разности равно $d_{\max} = \left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor$ (квадратные скобки обозначают целую часть числа). Следовательно,

количество прогрессий, удовлетворяющих условию задачи, равно:

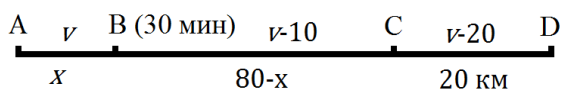
$$(n - 3) + (n - 6) + \dots + (n - 3k) = \frac{(2n - 3k - 3)k}{2}, \text{ где } k = d_{\max}.$$

Ответ: $\frac{(2n-3k-3)k}{2}$, где $k = \left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor$.

4. Из пункта А в пункт В, расстояние между которыми равно 100 км, выехал автомобилист. В момент, когда навигатор показывал, что ехать осталось 30 мин, автомобилист первый раз снизил скорость на 10 км/ч, а в момент, когда навигатор показывал, что ехать осталось 20 км, автомобилист второй раз снизил скорость на те же 10 км/ч. (Навигатор определяет оставшееся время и расстояние на основании текущей скорости движения.) Определите первоначальную скорость автомобиля, если известно, что автомобиль с пониженной скоростью двигался на 5 мин дольше, чем с дважды пониженной скоростью.

ЗАМЕЧАНИЕ. В 9 классе эта же задача давалась в чуть иной редакции.

Решение. По условию, расстояние от С до D равно 20 км. Обозначим расстояние от А до В через



x (км), тогда расстояние от В до С составит $(80 - x)$ км. Пусть $v \frac{\text{км}}{\text{ч}}$ – первоначальная скорость автомобиля. Тогда на участках ВС и CD она равна $(v - 10) \frac{\text{км}}{\text{ч}}$ и $(v - 20) \frac{\text{км}}{\text{ч}}$, соответственно. По условию, путь от В до D занял бы полчаса, если бы автомобиль продолжал двигаться со скоростью $v \frac{\text{км}}{\text{ч}}$, то есть

$$100 - x = \frac{v}{2}. \quad (1)$$

Далее, на путь из В в С он потратил на 5 мин больше времени, чем на путь из С в D:

$$\frac{80 - x}{v - 10} - \frac{20}{v - 20} = \frac{1}{12}. \quad (2)$$

Выразив x из первого уравнения и подставив во второе, получим уравнение для определения v :

$$\frac{\frac{v}{2} - 20}{v - 10} - \frac{20}{v - 20} = \frac{1}{12},$$

которое имеет корни 14 и 100. Корень 14, очевидно, посторонний, так как $v > 20$.

Ответ: $100 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

5. Решите уравнение $\sin \frac{\pi n}{12} \cdot \sin \frac{\pi k}{12} \cdot \sin \frac{\pi m}{12} = \frac{1}{8}$. Здесь k, m, n – натуральные числа, не превосходящие 5.

Решение.

Пусть $1 \leq n \leq k \leq m \leq 5$.

Рассмотрим случаи:

1) $n = k = m = 2$. Очевидно, этот набор – решение.

2) $n = 1$. Тогда заметим, что при $k = 2, m = 5$ получим верное равенство.

Функция $y = \sin x$ на промежутке $(0; \frac{\pi}{2})$ возрастает, поэтому наборы $(2; k; m)$ при $k \geq 3$ и $(1; 2; 3), (1; 2; 4); (1; 3; 5), (1; 4; 5)$ не являются решениями.

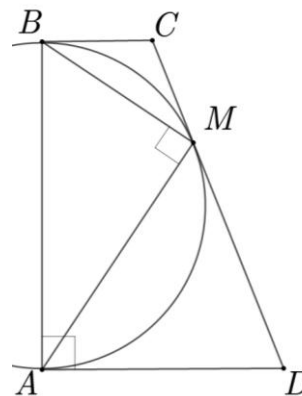
Остается убедиться, что $(1; 3; 4)$ не является решением.

Ответ: $(2; 2; 2), (1; 2; 5), (1; 5; 2), (2; 1; 5), (2; 5; 1), (5; 1; 2), (5; 2; 1)$.

6. В трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD угол DAB прямой.

Известно, что на стороне CD существует единственная точка M такая, что угол BMA прямой. Докажите, что $BC = CM$ и $AD = MD$.

Решение. Построим на стороне AB как на диаметре окружность. Так как угол BMA прямой, то точка M лежит на этой окружности. Так как такая точка M единственная на стороне CD , то CD – касательная к окружности. Следовательно, $BC = CM$ и $AD = MD$.



7. Произведение положительных чисел a и b больше 1. Докажите, что для любого натурального $n \geq 2$ верно неравенство

$$(a + b)^n > a^n + b^n + 2^n - 2.$$

Решение. $(a + b)^n = a^n + t_{n-1}a^{n-1}b + t_{n-2}a^{n-2}b^2 + \dots + t_1ab^{n-1} + b^n$, где t_k – целые числа, зависящие от n и k , но не зависящие от a и b , и при этом

$$t_{n-1} = t_1, t_{n-2} = t_2, \dots, t_{n-k} = t_k, \dots \quad (*)$$

$$\text{При } a = b = 1 \text{ имеем: } 2^n = 1 + t_{n-1} + t_{n-2} + \dots + t_1 + 1. \quad (**)$$

$$(a + b)^n = a^n + b^n + t_{n-1}(a^{n-1}b + ab^{n-1}) + t_{n-2}(a^{n-2}b^2 + a^2b^{n-2}) + \dots + t_{n-k}(a^{n-k}b^k + a^kb^{n-k}) + \dots$$

Воспользуемся неравенством Коши о среднем арифметическом и среднем геометрическом: для любых положительных чисел x и y справедливо неравенство $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$.

$$\text{Тогда } a^{n-1}b + ab^{n-1} \geq 2\sqrt{a^n b^n} > 2,$$

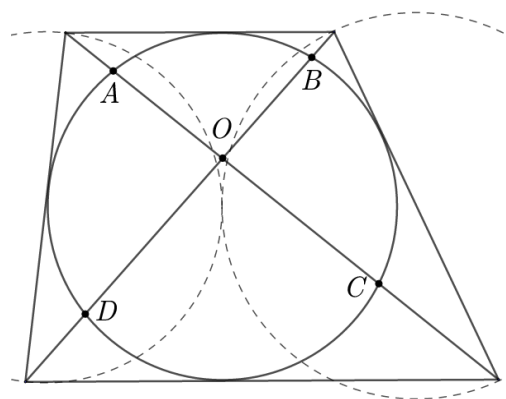
$$a^{n-2}b^2 + a^2b^{n-2} \geq 2\sqrt{a^n b^n} > 2, \dots, a^{n-k}b^k + a^kb^{n-k} \geq 2\sqrt{a^n b^n} > 2, \dots$$

Учитывая эти неравенства, симметрию коэффициентов (*) и равенство (**), получим требуемое.

8. Вписанная в трапецию окружность пересекает ее диагонали в точках A, B, C, D . Докажите, что сумма длин дуг $\widehat{BA} + \widehat{DC}$ больше суммы длин дуг $\widehat{AD} + \widehat{CB}$.

Решение. Пусть O – точка пересечения диагоналей.

Известно, что величина угла AOD равна полусумме угловых мер дуг $\widehat{CB}$ и $\widehat{AD}$. В задаче по сути требуется доказать, что сумма длин дуг $\widehat{AD} + \widehat{CB}$ меньше длины половины окружности, то есть их суммарная угловая мера меньше 180° , что эквивалентно тому, что угол AOD острый. Для обоснования последнего построим (как на диаметрах) окружности на боковых сторонах трапеции (рис.). Углы AOD и BOC , под которыми из точки O видны боковые стороны, равны между собой. Значит, возможен один из трех случаев: 1) точка O находится внутри каждой из окружностей, если углы AOD и BOC тупые, 2) точка O лежит на каждой из окружностей, если углы прямые, 3) точка O лежит вне окружностей, если углы острые. Но, поскольку наша трапеция описанная, сумма длин боковых сторон равна сумме длин оснований, а значит сумма радиусов этих окружностей равна полусумме оснований, то есть средней линии. Потому окружности имеют единственную общую точку, лежащую как раз на средней линии и потому отличную от O (так как длины оснований трапеции



различны). Таким образом, реализуется третий случай: углы AOD и BOC острые, и, следовательно, сумма длин дуг $\widehat{BA} + \widehat{DC}$ больше суммы длин дуг $\widehat{AD} + \widehat{CB}$. Утверждение доказано.