

Межрегиональная олимпиада школьников на базе ведомственных образовательных учреждений
11 КЛАСС

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

1. Имеется 11 не обязательно различных натуральных чисел a_1, \dots, a_{11} . Докажите, что существуют целые числа $c_1, \dots, c_{11} \in \{-1; 0; 1\}$, не все равные нулю, такие, что число $c_1 \cdot a_1 + \dots + c_{11} \cdot a_{11}$ делится нацело на 2047.
2. Известно, что уравнение $x^4 - 8x^3 + ax^2 + bx + 16 = 0$ имеет (с учетом кратности) четыре положительных корня. Найдите a и b .
3. Докажите, что для любого натурального числа n существует натуральное число N , делящееся нацело на n , сумма цифр которого равна n .
4. Имеется неограниченное количество пробирок трёх видов – А, В и С. Каждая из пробирок содержит один грамм раствора одного и того же вещества. В пробирках вида А содержится 10% раствор этого вещества, в пробирках В – 20% раствор и в С – 90% раствор. Последовательно, одну за другой, содержимое пробирок переливают в некоторую ёмкость. При этом при двух последовательных переливаниях нельзя использовать пробирки одного вида. Какое наименьшее количество переливаний надо сделать, чтобы получить 20,17% раствор? Какое наибольшее количество пробирок вида С может быть при этом взято?
5. Найдите сумму квадратов натуральных делителей числа 1800. (Например, сумма квадратов натуральных делителей числа 4 равна $1^2 + 2^2 + 4^2 = 21$).
6. В первый день Дима выбирает два различных числа из множества $\{0, 1, 2, \dots, 2332\}$ и записывает их в тетрадь. На второй день он снова выбирает два различных числа из этого же множества и прибавляет каждое из выбранных чисел к каждому числу, уже имеющемуся в тетради. Потом он дописывает в тетрадь как сами выбранные числа, так и все получившиеся суммы. (Например, если в первый день выбрать 2 и 3, а во второй – 2 и 4, то в тетради будут записаны числа 2, 3, 2, 4, 4, 5, 6, 7.) При этом, если какая-либо сумма превосходит 2332, он заменяет ее остатком от деления на 2333. На третий день он опять выбирает два различных числа, прибавляет их ко всем числам в тетради, дописывает в тетрадь эти два числа и все получившиеся суммы и т.д. Через какое минимальное количество дней (как бы Дима числа ни выбирал) каждое из чисел $0, 1, 2, \dots, 2332$ будет гарантированно записано в тетради хотя бы один раз? Опишите все варианты, при которых Диме придётся ждать максимальное количество дней.
7. Про пятиугольник $ABCDE$ известно, что
$$AB = BC = CD = DE, \angle B = 96^\circ, \angle C = \angle D = 108^\circ.$$
 Найдите $\angle E$.
8. Имеются таблицы А и В, в ячейки которых вписаны целые числа. С таблицей А можно проделывать следующие действия: 1) прибавлять к строке другую строку, умноженную на произвольное целое число; 2) прибавлять к столбцу другой столбец, умноженный на произвольное целое число. (Например, если к первой строке таблицы А прибавить третью строку, умноженную на 2, то получится таблица, изображенная на рисунке под словом *пример*.) Можно ли, проделав некоторое количество указанных действий с таблицей А, получить таблицу В? Ответ обоснуйте.