РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1

$\sin^3 x-\cos^3 x=4\sqrt{2}\sin^3 x\cos^3 x \Leftrightarrow (\sin x-\cos x)\left(\sin^2 x+\sin x\cos x+\cos^2 x\right)=4\sqrt{2}\sin^3 x\cos^3 x.$

Замена: $\sin x-\cos x=t, \sin x\cos x=\dfrac{1-t^2}{2}$. Тогда $t\left(3-t^2\right)=\sqrt{2}\left(1-t^2\right)^3$. Замена: $t=z\sqrt{2}$.

Уравнение примет вид $z\left(3-2z^2\right)-\left(1-2z^2\right)^3=0$. Имеется корень $z=-1$, и левая часть может быть разложена на множители следующим образом:

$$(z+1)(8z^5-8z^4-4z^3+2z^2+4z-1)=0. \qquad (1)$$

Так как $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$, то $t=\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)<-1$. Следовательно, $z<-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

При таких z многочлен пятой степени в левой части (1) принимает только отрицательные значения, так как $\left|8z^5\right|>\left|4z^3\right|$ и $\left|8z^4\right|>\left|2z^2\right|$. Поэтому $z=-1$ – единственный корень уравнения (1). Далее легко найти, что $\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=-1$, и $x=-\dfrac{\pi}{4}$.

Ответ: $-\dfrac{\pi}{4}$.

Задача 2

Рассмотрим уравнение $Axy+Bxz+Cyz=N$. Пусть числа A и B взаимно просты. Тогда существуют такие целые числа y и z, что $Ay+Bz=1$. Следовательно, $x=N-Cyz$. Поэтому наше уравнение имеет следующее решение в целых числах: $y=-5,\ z=3,\ x=N+27\cdot 3\cdot 5$. Утверждение доказано.

Задача 3

Обозначим коэффициенты заданного многочлена (кроме старшего) через a_0, a_1, a_2, a_3: $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+x^4$. Тогда по условию задачи имеем:

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+x^4=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4).$$

Вместе с многочленом $f(x)$ рассмотрим многочлен $h(x)$, имеющий корни $\{-x_1,-x_2,-x_3,-x_4\}$:

$$h(x)=(x+x_1)(x+x_2)(x+x_3)(x+x_4)=a_0-a_1x+a_2x^2-a_3x^3+x^4.$$

Рассмотрим многочлен $G(x)=f(x)h(x)$:

$$G(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x+x_1)(x+x_2)(x+x_3)(x+x_4)=$$
$$=(x^2-{x_1}^2)(x^2-{x_2}^2)(x^2-{x_3}^2)(x^2-{x_4}^2).$$

Заменой переменной $y=x^2$ получаем требуемый многочлен $g(y)$, поскольку

$$g(y)=(y-{x_1}^2)(y-{x_2}^2)(y-{x_3}^2)(y-{x_4}^2).$$

В нашем случае:

$$f(x)=8+32x-12x^2-4x^3+x^4,$$
$$h(x)=8-32x-12x^2+4x^3+x^4,$$
$$G(x)=f(x)h(x)=64-1216x^2+416x^4-40x^6+x^8,$$
$$g(y)=64-1216y+416y^2-40y^3+y^4.$$

Ответ: $g(x)=64-1216x+416x^2-40x^3+x^4$.

Задача 4

Пусть пробирок вида A, B и C взяли соответственно *a,b* и *c* штук. По условию $0,1a+0,2b+0,9c=0,2017\cdot(a+b+c)\Leftrightarrow 1000\cdot(a+2b+9c)=2017\cdot(a+b+c)$. Левая часть последнего равенства делится на 1000, следовательно на 1000 должна делиться и правая часть. Значит, наименьшее возможное значение суммы $a+b+c$ равно 1000. Покажем, что эта оценка достижима. То есть, докажем, что существуют неотрицательные целые числа *a,b* и *c* такие, что

$$\begin{cases} a+b+c=1000 \\ a+2b+9c=2017 \\ a\le 500,\, b\le 500,\, c\le 500. \end{cases} \qquad (1)$$

Последние три неравенства служат необходимым и достаточным условиям того, что удастся избежать использования пробирок одного вида при двух последовательных переливаниях.

Из первых двух уравнений системы (1) находим

$$a=7c-17,\, b=1017-8c. \qquad (2)$$

Подставив эти выражения в последние три неравенства системы (1), получим

$$7c\le 517,\, 8c\ge 518,\, c\le 500.$$

Отсюда наибольшее значение *c* равно 73. Ему соответствующие значения *a* и *b* могут быть найдены из (2). Они, очевидно, удовлетворяют неравенствам системы (1). Таким образом, разрешимость в неотрицательных целых числах системы (1) доказана.

Ответ: Наименьшее количество переливаний равно **1000**. При этом могут быть использованы максимум **73** пробирки вида C.

Задача 5

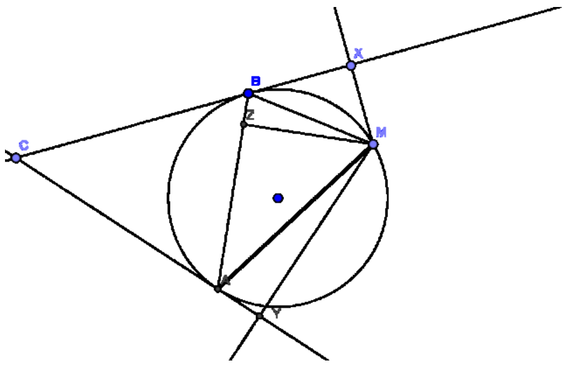
Пусть $\sigma(N)$– сумма квадратов натуральных делителей натурального числа *N*. Заметим, что для любых двух взаимно простых натуральных чисел *a* и *b* справедливо равенство: $\sigma(ab)=\sigma(a)\cdot\sigma(b)$. Действительно, любой делитель произведения *ab* есть произведение делителя *a* и делителя *b*. И наоборот: умножив делитель *a* на делитель *b*, поучим делитель произведения *ab*. Это же, очевидно, верно и для квадратов делителей (квадрат делителя произведения равен произведению квадратов делителей сомножителей и наоборот). Рассмотрим разложение числа *N* на простые множители: $N=p_1^{k_1}\cdot\ldots$

Здесь p_i– попарно различны простые числа, и все $k_i\in N$. Тогда $\sigma(N)=\sigma\left(p_1^{k_1}\right)\cdot\ldots$)

и $\sigma\left(p^k\right)=1+p^2+p^4+\ldots$ Поскольку $1800=2^3\cdot 3^2\cdot 5^2$, то

$$\sigma(1800)=\left(1+2^2+2^4+2^6\right)\cdot\left(1+3^2+3^4\right)\cdot\left(1+5^2+5^4\right)=5035485.$$

Ответ: 5035485.



Задача 6

$\angle XBM=\angle ZAM=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BM}$, следовательно, треугольники BMX и ZAM подобны, поэтому $\frac{XM}{ZM}=\frac{BM}{AM}$. $\angle ABM=\angle YAM=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AM}$, следовательно, треугольники AMYи BMZ подобны, поэтому $\frac{YM}{ZM}=\frac{AM}{BM}$. Отсюда

$$ZM^2 = XM \cdot YM = 24 \cdot 6 = 144, \qquad ZM = 12.$$

Ответ: 12

Задача 7

Покажем, что *для любого натурального числа n существует натуральное число N, делящееся нацело на n, сумма цифр которого равна n.* Действительно, рассмотрим числа вида $10^k, k = 0,1,\ldots$ а именно: 1, 10, 100, 1000,…Среди этих чисел выберем *n* чисел, имеющих одинаковые остатки от деления на *n* (это можно сделать, поскольку чисел вида 10^k бесконечно много, а остатков от деления на *n* ровно *n*). В качестве искомого *N* возьмем сумму этих *n* чисел. Утверждение доказано.

Задача 8

Если таблица 2 получена из таблицы 1 одним из указанных действий, то $a_1d_1 - b_1c_1 = a_2d_2 - b_2c_2$, что для таблиц А и В не выполнено. Поэтому указанным способом получить таблицу В из таблицы А нельзя.

Таблица 1

a_1	b_1
c_1	d_1

Таблица 2

a_2	b_2
c_2	d_2

Ответ: Нельзя.