УСЛОВИЯ И ОТВЕТЫ ЗАДАЧ ОЧНОГО ЭТАПА

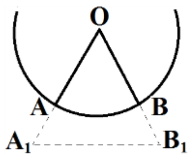
9 КЛАСС

1. Школьник вычислил произведение всех натуральных чисел от 1 до 52 включительно и записал в тетрадь ответ:

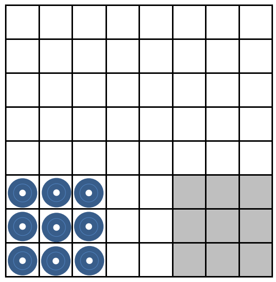
806581751709438785716606368564037669752895054408832778x4000000000000.

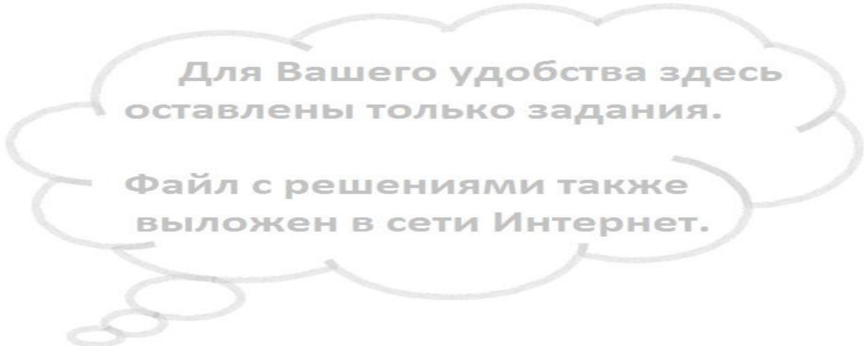
Но одну цифру (она отмечена символом x) он написал неразборчиво. Найдите эту цифру. Ответ обоснуйте.

2. Дан круговой сектор AOB. Угол AOB равен 60^0. Длины радиусов OA и OB увеличили на 5%, в результате они превратились в отрезки OA_1 и OB_1. Что больше: длина отрезка A_1B_1 или длина дуги AB? Ответ обоснуйте. (Длина окружности радиуса R равна $2\pi R$.)



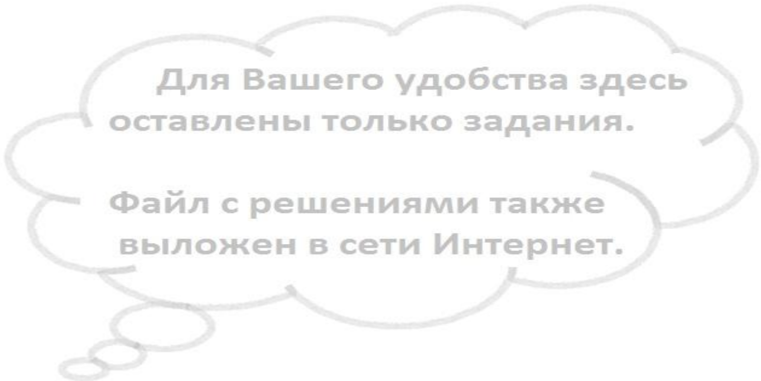
3. На доске 8x8 клеток расположены 9 шашек. Перемещения шашек (ходы) осуществляются следующим образом: выбирается первая (перемещаемая) и вторая шашки. Затем первую ставят на такую клетку, что исходное и полученное положения симметричны относительно второй шашки. Можно ли такими ходами переместить шашки из исходного положения в правый нижний угол? Ответ обоснуйте.





4. Докажите, что для каждого натурального числа n выполняется равенство $\left[\sqrt{4n+1}\right]=\left[\sqrt{4n+3}\right]$.

Здесь скобки [ ] обозначают целую часть числа. (Напомним, что целой частью числа x называется наибольшее целое число, не превосходящее x. Например, [3,7]=3.)



5. Уравнения $x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x - 3 = 0$ и $x^4 + 3x^3 + x^2 - 4x - 6 = 0$ имеют два общих корня. Найдите их.

6. Сколько существует пар натуральных чисел (a, b), $1 \le a \le 10, 1 \le b \le 10, a > b$, для которых число $a^{2015} + b^{2015}$ делится нацело на число $a - b$?

7. Числа a, b удовлетворяют равенствам $a^3 - 3a^2 + 5a = 1$ и $b^3 - 3b^2 + 5b = 5$. Найдите $a + b$.

8. Имеется n целых чисел $0,1,2,\ldots,n-1$. Переставив эти числа в случайном порядке, получим их некоторую *перестановку* $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$. Из исходного набора чисел $(0,1,2,\ldots,n-1)$ и этой перестановки $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ получим новый набор чисел $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ по правилу: $a_1 = r_n(0 + i_1), a_2 = r_n(1 + i_2), \ldots, a_n = r_n((n-1) + i_n)$, где $r_n(m)$ – остаток от деления числа m на число n. (Например, пусть $n = 3$. Тогда, из исходного набора (0,1,2) и перестановки (i_1, i_2, i_3)= (1,2,0) получится набор $(a_1, a_2, a_3) = (1,0,2)$, т.к. $r_3(0+1) = 1, r_3(1+2) = 0, r_3(2+0) = 2.$)

а) При $n = 5$ приведите пример такой перестановки $(i_1, i_2, \ldots, i_5)$, что в соответствующем наборе $(a_1, a_2,$ все числа различны;

б) докажите, что, если $n = 6$, то какую бы перестановку $(i_1, i_2, \ldots, i_6)$ мы ни взяли, в наборе $(a_1, a_2,$ обязательно встретятся одинаковые числа.