

УСЛОВИЯ И ОТВЕТЫ ЗАДАЧ ОЧНОГО ЭТАПА

10 КЛАСС

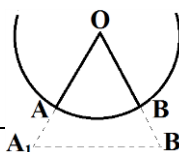
1. (10 баллов) Школьник вычислил произведение всех натуральных чисел от 1 до 52 включительно и записал в тетрадь ответ:

806581751709438785716606368564037669752895054408832778x4000000000000.

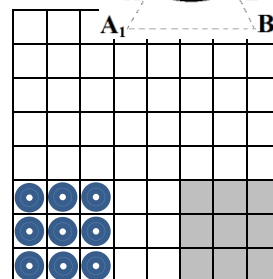
Но одну цифру (она отмечена символом x) он написал неразборчиво. Найдите эту цифру. Ответ обоснуйте.

2. (10 баллов) Дан круговой сектор AOB. Угол AOB равен 60° . Длины радиусов OA и OB увеличили на 5%, в результате они превратились в отрезки OA₁ и OB₁. Что больше: длина отрезка A₁B₁ или длина дуги AB? Ответ обоснуйте.

(Длина окружности радиуса R равна $2\pi R$.)



3. (10 баллов) На доске 8x8 клеток расположены 9 шашек. Перемещения шашек (ходы) осуществляются следующим образом: выбирается первая (перемещаемая) и вторая шашки. Затем первую ставят на такую клетку, что исходное и полученное положения симметричны относительно второй шашки. Можно ли такими ходами переместить шашки из исходного положения в правый нижний угол? Ответ обоснуйте.



4. (15 баллов) Докажите, что для каждого натурального числа n выполняется равенство $[\sqrt{4n+1}] = [\sqrt{4n+3}]$. Здесь скобки $[]$ обозначают целую часть числа. (Напомним, что целой частью числа x называется наибольшее целое число, не превосходящее x . Например, $[3,7] = 3$.)

5. (10 баллов) Уравнения $x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x - 3 = 0$ и $x^4 + 3x^3 + x^2 - 4x - 6 = 0$ имеют два общих корня. Найдите их.

6. (15 баллов) Пусть $f(x) = x^3 - x + 1$. Докажите, что для всех натуральных чисел m , больших единицы, числа $m, f(m), f(f(m))$ попарно взаимно просты. (Натуральные числа a, b, c называют попарно взаимно простыми, если каждое из них больше 1, и никакие два из них не имеют отличных от 1 общих делителей. Например, числа 7, 8, 15 попарно взаимно просты, а числа 5, 8, 15 – нет.)

7. (15 баллов) Докажите неравенство $a(a-1)^2 + b(b-1)^2 + c(c-1)^2 \leq \frac{4}{9}$, если известно, что a, b, c – неотрицательные числа, удовлетворяющие условию $a + b + c = 1$.

8. (15 баллов) В классе 10 учеников. Из них требуется сформировать две команды (одну для уборки актового зала, вторую – для работы на пришкольном участке). При этом: 1) количество людей в командах может быть различным (но отличным от нуля), 2) каждый ученик может быть членом только одной команды или не входить в эти команды вовсе. Сколькими способами это можно сделать?