УСЛОВИЯ И ОТВЕТЫ ЗАДАЧ ОЧНОГО ЭТАПА

9 КЛАСС

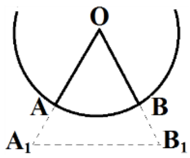
1. Школьник вычислил произведение всех натуральных чисел от 1 до 52 включительно и записал в тетрадь ответ:

806581751709438785716606368564037669752895054408832778x4000000000000.

Но одну цифру (она отмечена символом x) он написал неразборчиво. Найдите эту цифру. Ответ обоснуйте.

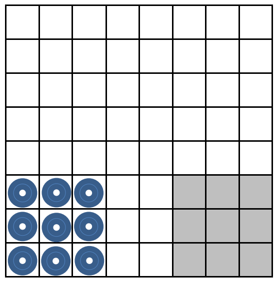
Ответ: 2.

2. Дан круговой сектор AOB. Угол AOB равен 60^0. Длины радиусов OA и OB увеличили на 5%, в результате они превратились в отрезки OA_1 и OB_1. Что больше: длина отрезка A_1B_1 или длина дуги AB? Ответ обоснуйте. (Длина окружности радиуса R равна $2\pi R$.)

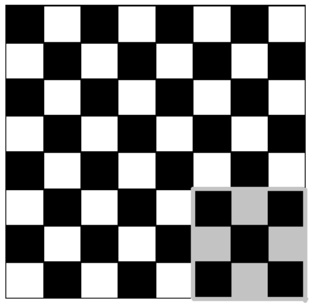


Ответ: длина отрезка больше длины дуги.

3. На доске 8x8 клеток расположены 9 шашек. Перемещения шашек (ходы) осуществляются следующим образом: выбирается первая (перемещаемая) и вторая шашки. Затем первую ставят на такую клетку, что исходное и полученное положения симметричны относительно второй шашки. Можно ли такими ходами переместить шашки из исходного положения в правый нижний угол? Ответ обоснуйте.



Решение: Раскрасим клетки в белый и черный цвет. В результате хода перемещаемая шашка из белой клетки попадает вновь в белую, а из черной в черную. Значит, количество белых клеток, занимаемых шашками, всегда одно и то же. Остается заметить, что в правом нижнем углу шашки бы занимали 4 белые клетки, а в исходном положении они занимают 5 белых клеток. Поэтому переместить шашки из исходного положения в правый нижний угол невозможно.



Ответ: нельзя.

4. Докажите, что для каждого натурального числа n выполняется равенство $\left[\sqrt{4n+1}\right]=\left[\sqrt{4n+3}\right]$.

Здесь скобки [ ] обозначают целую часть числа. (Напомним, что целой частью числа x называется наибольшее целое число, не превосходящее x. Например, [3,7]=3.)

Решение: Целые части чисел a и b равны в том и только том случае, когда полуинтервал $(a,b]$ не содержит целые числа. Предположим противное: пусть при некотором натуральном n имеет место неравенство $\left[\sqrt{4n+1}\right]\neq\left[\sqrt{4n+3}\right]$. Тогда $\exists m\in N:\sqrt{4n+1}<m\leq\sqrt{4n+3}\Leftrightarrow 4n+1<m^2\leq 4n+3$. Следовательно, m^2 равен либо $4n+2$, либо $4n+3$. Но квадрат целого числа при делении на 4 не может дать остаток 2 или 3. Полученное противоречие доказывает требуемое равенство.

5. Уравнения $x^4+2x^3-x^2-2x-3=0$ и $x^4+3x^3+x^2-4x-6=0$ имеют два общих корня. Найдите их.

Ответ: $\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$.

6. Сколько существует пар натуральных чисел (a,b), $1\le a\le 10, 1\le b\le 10, a>b$, для которых число $a^{2015}+b^{2015}$ делится нацело на число $a-b$?

Ответ: 25 пар.

7. Числа a,b удовлетворяют равенствам $a^3-3a^2+5a=1$ и $b^3-3b^2+5b=5$. Найдите $a+b$.

Ответ: 2.

8. Имеется n целых чисел $0,1,2,\dots,n-1$. Переставив эти числа в случайном порядке, получим их некоторую *перестановку* $(i_1,i_2,\dots,i_n)$. Из исходного набора чисел $(0,1,2,\dots,n-1)$ и этой перестановки $(i_1,i_2,\dots,i_n)$ получим новый набор чисел $(a_1,a_2,\dots,a_n)$ по правилу: $a_1=r_n(0+i_1), a_2=r_n(1+i_2),\dots,a_n=r_n((n-1)+i_n)$, где $r_n(m)$ – остаток от деления числа m на число n. (Например, пусть $n=3$. Тогда, из исходного набора (0,1,2) и перестановки (i_1,i_2,i_3)= (1,2,0) получится набор $(a_1,a_2,a_3)=(1,0,2)$, т.к. $r_3(0+1)=1, r_3(1+2)=0, r_3(2+0)=2.$)

а) При $n=5$ приведите пример такой перестановки $(i_1,i_2,\dots,i_5)$, что в соответствующем наборе $(a_1,a_2,\dots,a_5)$ все числа различны;

б) докажите, что, если $n=6,$ то какую бы перестановку $(i_1,i_2,\dots,i_6)$ мы ни взяли, в наборе $(a_1,a_2,\dots,a_6)$ обязательно встретятся одинаковые числа.

Решение: а) Например, $(i_1,i_2,\dots,i_5)=(3,4,0,1,2)$;

б) По условию $(0+1+\ldots+5)+(i_1+\ldots+i_6)=a_1+\ldots+a_6 \pmod 6$. Если бы все a_i были различны, то сумма чисел в правой части была бы равна 15. Но равенство $15+15=15 \pmod 6$ не справедливо. Поэтому среди чисел $(a_1,a_2,\dots,a_6)$ есть одинаковые.