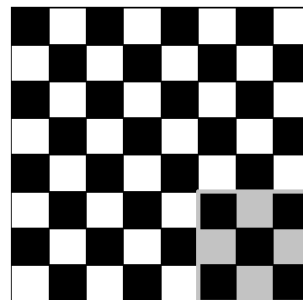


Ответы (решения)

1. **Ответ:** 2.

2. **Ответ:** длина отрезка больше длины дуги.

3. **Решение:** Раскрасим клетки в белый и черный цвет. В результате хода перемещаемая шашка из белой клетки попадает вновь в белую, а из черной в черную. Значит, количество белых клеток, занимаемых шашками, всегда одно и то же. Остается заметить, что в правом нижнем углу шашки бы занимали 4 белые клетки, а в исходном положении они занимают 5 белых клеток. Поэтому переместить шашки из исходного положения в правый нижний угол невозможно.



Ответ: нельзя.

4. **Решение:** Целые части чисел a и b равны в том и только том случае, когда полуинтервал $(a, b]$ не содержит целые числа. Предположим противное: пусть при некотором натуральном n имеет место неравенство $\lceil \sqrt{4n+1} \rceil \neq \lceil \sqrt{4n+3} \rceil$. Тогда

$\exists m \in \mathbb{N} : \sqrt{4n+1} < m \leq \sqrt{4n+3} \Leftrightarrow 4n+1 < m^2 \leq 4n+3$. Следовательно, m^2 равен либо $4n+2$, либо $4n+3$. Но квадрат целого числа при делении на 4 не может дать остаток 2 или 3. Полученное противоречие доказывает требуемое равенство.

$$\frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}.$$

5. **Ответ:** 2

6. **Решение:** Заметим, что $m^3 > m$ при $m > 1$, и, следовательно, числа $f(m)$ и $f(f(m))$ отличны от 1. Докажем, что числа m и $f(m)$ взаимно просты. Предположим противное: у них есть общий делитель $d \neq 1$. Рассмотрим равенство $f(m) = m^3 - m + 1$. В правой части на d делятся все слагаемые кроме свободного члена, следовательно правая часть на d не делится. Но левая часть делится на d по предположению. Пришли к противоречию. Аналогично доказывается, что и числа $f(m)$ и $f(f(m))$ взаимно просты. Чтобы доказать, что взаимно просты числа m и $f(f(m))$, достаточно заметить, что $f(f(m))$ представляет собой многочлен от m со свободным членом, равным единице: $f(f(m)) = m^9 + \dots + 1$. Далее остается провести те же рассуждения, что и при доказательстве взаимной простоты чисел m и $f(m)$.

7. **Решение:** Равенство $a+b+c=1$ перепишем в виде $a-1/3+b-1/3+c-1/3=0$. Замена $A=-a+1/3, B=-b+1/3, C=-c+1/3$. И, поскольку числа a, b, c не превосходят 1, имеют место неравенства

$$A, B, C \geq -2/3. \quad (1)$$

В новых переменных $a(a-1)^2 + b(b-1)^2 + c(c-1)^2 = -A^3 - A^2 - B^3 - B^2 - C^3 - C^2 + 4/9$, и доказываемое неравенство принимает вид $A^2 + A^3 + B^2 + B^3 + C^2 + C^3 \geq 0$ или $A^2(1+A) + B^2(1+B) + C^2(1+C) \geq 0$. Это неравенство, очевидно, выполнено в силу (1).

Отметим, что возможно решение, использующее производную: несложно показать, что

$$\max_{0 \leq x \leq 1} (x(x-1)^2) = 4/27, \text{ максимум достигается при } x = 1/3.$$

8. **Ответ:** $3^{10} - 2 \cdot 2^{10} + 1$.