

Условия и ответы на задачи заключительного этапа 2013-14 учебный год

1. Какое число надо убрать из набора подряд идущих натуральных чисел $1, 2, 3, \dots$, чтобы сумма всех остальных чисел делилась нацело на 2014? Решение обоснуйте.

Ответ: 1007.

2. Докажите равенство

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{64}\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{64}\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{64}\right) + \dots + \operatorname{tg}\left(\frac{31\pi}{64}\right) = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{32}\right)} = \frac{1}{\sin\left(\frac{5\pi}{32}\right)} = \frac{1}{\sin\left(\frac{9\pi}{32}\right)} = \dots = \frac{1}{\sin\left(\frac{31\pi}{32}\right)}$$

3. $ABCDEF$ – правильный шестиугольник, имеющий зеркальную внутреннюю поверхность. Из точки A выходит луч света и после двух отражений от сторон шестиугольника (в точках M и N), попадает в точку D (рис. 1). Найдите тангенс угла EAM .

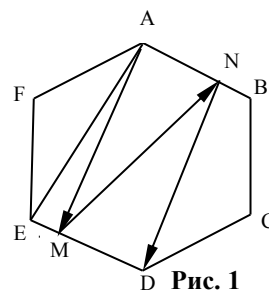


Рис. 1

Ответ: $\frac{1}{3\sqrt{3}}$.

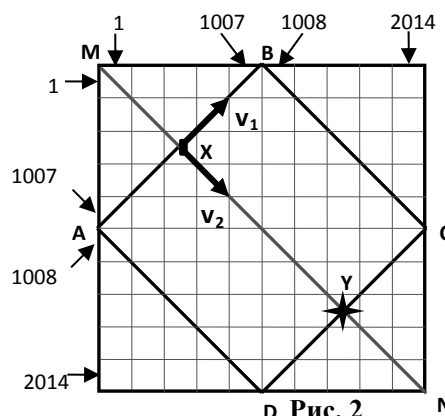
4. При возведении двузначного числа в степень 2014 последняя цифра оказалась равна 1, а предпоследняя равна 4. Найдите все такие двузначные числа.

Ответ: 11, 61, 39, 89.

5. Квадратная таблица состоит из 2014 строк и 2014 столбцов. В каждой клетке, находящейся на пересечении строки с номером i и столбца с номером j , записано число $a_{i,j} = \log_2 \left(1 - \cos \left(\frac{\pi}{3} (i - j) + \frac{\pi}{2} \right) \right)$. Найдите сумму всех чисел в таблице.

Ответ: -2704130

6. На плоскости изображён квадрат со стороной, равной 2014 клеткам. Диагональ одной клетки равна 1 см. Внутри квадрата расположен ещё один квадрат $ABCD$, вершинами которого являются середины сторон исходного квадрата (рис. 2). Из точки X одновременно начинают двигаться две точки. Первая точка движется со скоростью $v_1 = 10$ см/сек по часовой стрелке по сторонам квадрата $ABCD$.



Вторая точка начинает двигаться до точки N и далее курсирует по диагонали MN исходного квадрата со скоростью $v_2 = 13$ см/сек. Через какое минимальное время они встретятся в точке Y ?

Ответ: 1007 с.

7. Известно, что четыре прямоугольника с общим прямым углом, изображенные на листе в клетку (рис. 3), имеют размеры $n \times (n+2)$ клеток, где n – некоторое натуральное число. Докажите, что делая разрезы только по изображённым линиям, можно вырезать фигуру, количество клеток в которой делится нацело на 12.

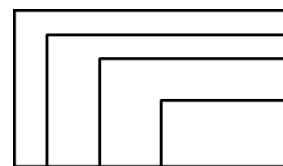


Рис. 3

8. Несколько самосвалов, стоя в очереди, загружаются поочередно в пункте А (время загрузки одно и то же для всех машин) и отвозят груз в пункт В, там они мгновенно разгружаются и возвращаются в А. Скорости машин одинаковы, скорость гружёной машины составляет $\frac{6}{7}$ скорости порожней. Первым выехал из А водитель Петров. На обратном пути он встретил водителя Иванова, выехавшего из А последним, и прибыл в А через 6 минут после встречи. Здесь Петров сразу же приступил к загрузке, а по окончании ее выехал в пункт В и встретил Иванова второй раз через 40 минут после первой встречи. От

места второй встречи до А Иванов ехал не менее **16** минут, но не более **19** минут. Определите время загрузки и количество загружавшихся самосвалов.

Ответ: время загрузки - 13 , количество загружавшихся самосвалов - 5.

Критерии определения призёров и победителей заключительного этапа
2013-14 учебный год

Максимум за каждую задачу – 3 балла

1-е место: не менее 23 баллов;

2-е место: не менее 6 полностью решённых задач или не менее 19 баллов;

3-е место: не менее 5 полностью решённых задач или не менее 15 баллов.