10 класс (решения)

Вариант 1

1. **(3 балла)** Заданы 10 различных натуральных чисел, не превосходящих 23. Докажите, что найдутся четыре различных числа a,b,c,d среди них, для которых $\frac{a+b}{2}=\frac{c+d}{2}$.

Решение:

Пусть $a_1,\ldots,a_{10}$ – натуральные ≤ 23. Имеется $9+8+\ldots+2+1=\frac{9\cdot 10}{2}=45$ различных пар чисел $(a_1,a_2),(a_1,a_3),\ldots,(a_9,a_{10})$. Для каждой пары сумма входящих в нее чисел больше 2 и меньше 46. Следовательно, по принципу Дирихле найдутся две различные пары с одинаковой суммой. Пусть теперь

$$(a_{i_1},a_{j_1}),(a_{i_2},a_{j_2}),\quad i_1<j_1, i_2<j_2$$

две такие пары. Осталось заметить, что в этих двух парах не может быть совпадающих чисел (легко доказывается от противного). Тогда полагаем

$$a=a_{i_1},\quad b=a_{j_1},\quad c=a_{i_2},\quad d=a_{j_2}$$

и имеем требуемое равенство $\frac{a+b}{2}=\frac{c+d}{2}$.

2. **(3 балла)** Автомат работает с магнитной карточкой, на которой может быть записана любая пара натуральных чисел. С записью $(m;n)$ он умеет совершать любое из следующих действий:

4) менять числа местами: $(m;n)\to(n;m)$;
5) заменять первое число суммой первого и второго: $(m;n)\to(m+n;n)$;
6) заменять второе число модулем разности первого и второго: $(m;n)\to(m;|m-n|)$.

Других действий автомат выполнять не может.

Докажите, что никакие манипуляции с автоматом и карточкой, на которой изначально записаны числа $(1037;1159)$, не позволят получить на ней запись $(611;1081)$.

Решение:

Можно заметить, что все операции, производимые автоматом, сохраняют НОД предъявленной ему пары чисел.

Числа, представленные в условии, разлагаются на простые множители следующим образом: $1037=17\times 61$, $1159=19\times 61$, $611=13\times 47$, $1081=23\times 47$.

Таким образом НОД первой пары равен 61, а второй – 47, и, следовательно, вторая пара из первой получена быть не может.

3. **(4 балла)** Решите уравнение вида $f\left(f\left(x\right)\right)=x$, если известно, что $f\left(x\right)=x^2+5x+1$.

Решение:

Очевидно, что часть решений уравнения $f\left(f\left(x\right)\right)=x$ можно найти, решив более простое уравнение $f\left(x\right)=x$, которое в данном случае имеет вид:

$$x^2+5x+1=x \Leftrightarrow x^2+4x+1=0 \Leftrightarrow x=-2\pm\sqrt{3}.$$

Так как корни многочлена $f\left(x\right)-x=x^2+4x+1$ являются корнями многочлена $f\left(f\left(x\right)\right)-x=x^4+10x^3+32x^2+34x+7$, то первый многочлен делит второй. Результат деления есть x^2+6x+7.Следовательно, исходное уравнение равносильно совокупности уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} x^2+4x+1=0 \\ x^2+6x+7=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2\pm\sqrt{3} \\ -3\pm\sqrt{2} \end{array}\right. .$$

Ответ: $-2\pm\sqrt{3}$, $-3\pm\sqrt{2}$.

4. **(4 балла)** На шахматную доску нанесены числа (см. рис. 1). Сколько существует расстановок 8 ладей, не бьющих друг друга, при которых на местах, занимаемых ладьями, встречаются все числа от 0 до 7?

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Рис.1.

Решение:

Пронумеруем линии клеток доски числами от 1 до 8 сверху вниз. На первой линии позицию ладьи можно выбрать 8 способами. Например, выбрали первую клетку с числом 0. На второй линии остаются 7 вариантов выбора. Шесть из них (клетки со второй по седьмую) обладают тем свойством, что под ними в нижней половине доски стоят числа, отличающиеся от числа, занимаемого первой ладьей (в нашем случае – от числа 0), а одна клетка (последняя, с числом 7), такова, что под ней в нижней половине стоит число, занятое первой ладьей (в нашем случае – 0).

Рассмотрим первую группу из 6 вариантов выбора и сделаем произвольный выбор (например, вторая клетка с числом 1). После такого выбора получается, что в нижней половине доски запрещен выбор позиций с двумя различными числами (в нашем случае 7 и 6). Поэтому позиции с этими числами нужно выбрать в верхней половине доски, а таких вариантов ровно 2 (в нашем случае 7 и 8 клетки в линиях 3 и 4). После этого выбора в нижней половине доски останутся 4 столбца с различными числами по столбцам. Т.е. в нижней половине имеется 4! = 24 варианта выбора. Всего, таким образом, получается 8x6x2x24 варианта.

Рассмотрим вариант выбора позиции во второй линии, когда под выбранной клеткой в нижней половине доски стоит число, выбранное на первой линии (в нашем случае последняя клетка с числом 7). После такого выбора в третьей линии имеется 6 вариантов, приводящих к единственному варианту в четвертой линии. После выбора вариантов в верхней половине доски, в нижней опять остаются 4 свободных столбца с четырьмя различными числами, т.е. 24 варианта. Всего, таким образом, получается 8x1x6x24 варианта.

Итого получаем:

$8\times6\times2\times24+8\times1\times6\times24=3456$.

Ответ: 3456.

5. **(5 баллов)** Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x^3+4y=y^3+16x \\ \dfrac{y^2+1}{x^2+1}=5 \end{cases}.$$

Решение:

Справедливы следующие равносильные преобразования:

$$\begin{cases} x^3+4y=y^3+16x \\ \dfrac{y^2+1}{x^2+1}=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2=5x^2+4 \\ x^3+4y=y^3+16x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} y=\sqrt{5x^2+4} \\ x^3+4\sqrt{5x^2+4}=\left(5x^2+4\right)\sqrt{5x^2+4}+16x \end{cases} \\ \begin{cases} y=-\sqrt{5x^2+4} \\ x^3-4\sqrt{5x^2+4}=-\left(5x^2+4\right)\sqrt{5x^2+4}+16x \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} y=\sqrt{5x^2+4} \\ x^3=5x^2\sqrt{5x^2+4}+16x \end{cases} \\ \begin{cases} y=-\sqrt{5x^2+4} \\ x^3=-5x^2\sqrt{5x^2+4}+16x \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x=0 \\ y=\pm 2 \end{cases} \\ \begin{cases} y=\sqrt{5x^2+4} \\ x^2=5x\sqrt{5x^2+4}+16 \end{cases} \\ \begin{cases} y=-\sqrt{5x^2+4} \\ x^2=-5x\sqrt{5x^2+4}+16 \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x=0 \\ y=\pm 2 \end{cases} \\ \begin{cases} y=\sqrt{5x^2+4} \\ \sqrt{5x^2+4}=\dfrac{x^2-16}{5x} \end{cases} \\ \begin{cases} y=-\sqrt{5x^2+4} \\ \sqrt{5x^2+4}=-\dfrac{x^2-16}{5x} \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=0\\ y=\pm 2\end{cases}\\ \begin{cases}y=\sqrt{5x^2+4}\\ \dfrac{x^2-16}{5x}\geq 0\\ 5x^2+4=\dfrac{\left(x^2-16\right)^2}{25x^2}\end{cases}\\ \begin{cases}y=-\sqrt{5x^2+4}\\ \dfrac{x^2-16}{5x}\leq 0\\ 5x^2+4=\dfrac{\left(x^2-16\right)^2}{25x^2}\end{cases}\end{array}\right. \qquad (1)$$

Решим уравнение $5x^2+4=\dfrac{\left(x^2-16\right)^2}{25x^2}$ при $x\neq 0$. Оно равносильно биквадратному уравнению $31x^4+33x^2-64=0$, решения которого есть $x=1$ и $x=-1$.

Подставляя полученные значения в ограничения совокупности (1), получаем ответ.

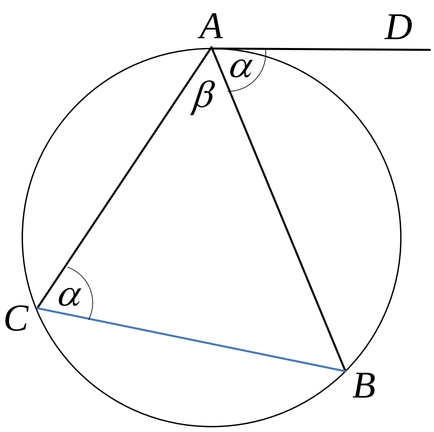
Ответ: $(0;\pm 2)$, $(\pm 1;\mp 3)$.

6. **(5 баллов)** Из точки A, лежащей на окружности радиуса 3, проведены хорды AB, AC и касательная AD. Угол между хордами равен $\dfrac{\pi}{4}$, а угол между хордой AC и касательной AD, который не содержит хорды AB, равен $\dfrac{5\pi}{12}$. Вычислите целую площади треугольника ABC.

Решение:

Пусть $\angle DAC=\alpha$, $\angle BAC=\beta$, а радиус окружности равен R.

Известно, что $\angle ACB=\angle DAC=\alpha$.



По теореме синусов $\frac{|AB|}{\sin\alpha}=\frac{|BC|}{\sin\beta}=2R$. Следовательно, $|AB|=2R\sin\alpha$, а $|BC|=2R\sin\beta$.

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|AB|\cdot|BC|\cdot\sin(\angle ABC).$$

Следовательно,

$$S_{\triangle ABC}=2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta) \qquad (2).$$

Для вычисления величины площади требуется знать значения $\sin\alpha$ и $\sin(\alpha+\beta)$. Вычислим эти величины в условиях задачи. Для этого посчитаем $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$.

$$\sin\alpha=\sin\frac{5\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\right)=\cos\frac{\pi}{12}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}=\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}.$$

$$\cos\alpha=\cos\frac{5\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\right)=\sin\frac{\pi}{12}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}=\frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}.$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{5\pi}{12}\right)=\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Подставив полученные значения в (2), нетрудно получить, что $S_{\triangle ABC}=\frac{9}{4}(3+\sqrt{3})$.

Остается вычислить ответ.

Ответ: 10.

Вариант 2

1. **(3 балла)** Заданы 11 различных натуральных чисел, не превосходящих 27. Докажите, что найдутся четыре различных числа a,b,c,d среди них, для которых $\frac{a+b}{5}=\frac{c+d}{5}$.

Решение:

Пусть $a_1,\ldots,a_{11}$ – натуральные ≤ 27. Имеется $10+9+8+\ldots+2+1=\frac{11\cdot 10}{2}=55$ различных пар чисел $(a_1,a_2),(a_1,a_3),\ldots,(a_{10},a_{11})$. Для каждой пары сумма входящих в нее чисел больше 2 и меньше 54. Следовательно, по принципу Дирихле найдутся две различные пары с одинаковой суммой. Пусть теперь

$$(a_{i_1},a_{j_1}),(a_{i_2},a_{j_2}),\quad i_1<j_1, i_2<j_2$$

две такие пары. Осталось заметить, что в этих двух парах не может быть совпадающих чисел (легко доказывается от противного). Тогда полагаем

$$a=a_{i_1},\quad b=a_{j_1},\quad c=a_{i_2},\quad d=a_{j_2}$$

и имеем требуемое равенство $\frac{a+b}{5}=\frac{c+d}{5}$.

2. **(3 балла)** Автомат работает с магнитной карточкой, на которой может быть записана любая пара натуральных чисел. С записью $(m;n)$ он умеет совершать любое из следующих действий:

4) менять числа местами: $(m;n)\to(n;m)$;
5) заменять первое число суммой первого и второго: $(m;n)\to(m+n;n)$
6) заменять второе число модулем разности первого и второго: $(m;n)\to(m;|m-n|)$.

Других действий автомат выполнять не может.

Докажите, что никакие манипуляции с автоматом и карточкой, на которой изначально записаны числа $(901;1219)$, не позволят получить на ней запись $(871;1273)$.

Решение:

Можно заметить, что все операции, производимые автоматом, сохраняют НОД предъявленной ему пары чисел.

Числа, представленные в условии, разлагаются на простые множители следующим образом: $901 = 17 \times 53$, $1219 = 23 \times 53$, $871 = 13 \times 67$, $1273 = 19 \times 67$.

Таким образом НОД первой пары равен 53, а второй – 67, и, следовательно, вторая пара из первой получена быть не может.

3. **(4 балла)** Решите уравнение вида $f\left(f\left(x\right)\right) = x$, если известно, что $f\left(x\right) = x^2 + 2x - 5$.

Решение:

Очевидно, что часть решений уравнения $f\left(f\left(x\right)\right) = x$ можно найти, решив более простое уравнение $f\left(x\right) = x$, которое в данном случае имеет вид:

$$x^2 + 2x - 5 = x \Leftrightarrow x^2 + x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{21}).$$

Так как корни многочлена $f\left(x\right) - x = x^2 + x - 5$ являются корнями многочлена $f\left(f\left(x\right)\right) - x = x^4 + 4x^3 - 4x^2 - 17x + 10$, то первый многочлен делит второй. Результат деления есть $x^2 + 3x - 2$.Следовательно, исходное уравнение равносильно совокупности уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} x^2 + x - 5 = 0 \\ x^2 + 3x - 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{21}) \\ \frac{1}{2}(-3 \pm \sqrt{17}) \end{array}\right. .$$

Ответ: $\frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{21})$, $\frac{1}{2}(-3 \pm \sqrt{17})$.

4. **(4 балла)** На шахматную доску нанесены числа (см. рис. 1). Сколько существует расстановок 8 ладей, не бьющих друг друга, при которых на местах, занимаемых ладьями, встречаются все числа от 0 до 7?

$$\begin{pmatrix} 7 & 7 & 7 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 7 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

Рис.1.

Решение:

Пронумеруем линии клеток доски числами от 1 до 8 сверху вниз. На первой линии позицию ладьи можно выбрать 8 способами. Например, выбрали первую клетку с числом 0. На второй линии остаются 7 вариантов выбора. Шесть из них (клетки со второй по седьмую) обладают тем свойством, что под ними в нижней половине доски стоят числа, отличающиеся от числа, занимаемого первой ладьей (в нашем случае – от числа 0), а одна клетка (последняя, с числом 7), такова, что под ней в нижней половине стоит число, занятое первой ладьей (в нашем случае – 0).

Рассмотрим первую группу из 6 вариантов выбора и сделаем произвольный выбор (например, вторая клетка с числом 1). После такого выбора получается, что в нижней половине доски запрещен выбор позиций с двумя различными числами (в нашем случае 7 и 6). Поэтому позиции с этими числами нужно выбрать в верхней половине доски, а таких вариантов ровно 2 (в нашем случае 7 и 8 клетки в линиях 3 и 4). После этого выбора в нижней половине доски останутся 4 столбца с различными числами по столбцам. Т.е. в нижней половине имеется 4! = 24 варианта выбора. Всего, таким образом, получается 8х6х2х24 варианта.

Рассмотрим вариант выбора позиции во второй линии, когда под выбранной клеткой в нижней половине доски стоит число, выбранное на первой линии (в нашем случае последняя клетка с числом 7). После такого выбора в третьей линии имеется 6 вариантов, приводящих к единственному варианту в четвертой линии. После выбора вариантов в верхней половине доски, в нижней опять остаются 4 свободных столбца с четырьмя различными числами, т.е. 24 варианта. Всего, таким образом, получается 8х1х6х24 варианта.

Итого получаем:
$8\times6\times2\times24+8\times1\times6\times24=3456$.

Ответ: 3456.

5. **(5 баллов)** Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x^3+2y=y^3+14x \\ \dfrac{y^2+1}{x^2+1}=3 \end{cases}.$$

Решение:

Справедливы следующие равносильные преобразования:

$$\begin{cases} x^3+2y=y^3+14x \\ \dfrac{y^2+1}{x^2+1}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2=3x^2+2 \\ x^3+2y=y^3+14x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} y=\sqrt{3x^2+2} \\ x^3+2\sqrt{3x^2+2}=\left(3x^2+2\right)\sqrt{3x^2+2}+14x \end{cases} \\ \begin{cases} y=-\sqrt{3x^2+2} \\ x^3-2\sqrt{3x^2+2}=-\left(3x^2+2\right)\sqrt{3x^2+2}+14x \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} y=\sqrt{3x^2+2} \\ x^3=3x^2\sqrt{3x^2+2}+14x \end{cases} \\ \begin{cases} y=-\sqrt{3x^2+2} \\ x^3=-3x^2\sqrt{3x^2+2}+14x \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x=0 \\ y=\pm\sqrt{2} \end{cases} \\ \begin{cases} y=\sqrt{3x^2+2} \\ x^2=3x\sqrt{3x^2+2}+14 \end{cases} \\ \begin{cases} y=-\sqrt{3x^2+2} \\ x^2=-3x\sqrt{3x^2+2}+14 \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x=0 \\ y=\pm\sqrt{2} \end{cases} \\ \begin{cases} y=\sqrt{3x^2+2} \\ \sqrt{3x^2+2}=\dfrac{x^2-14}{3x} \end{cases} \\ \begin{cases} y=-\sqrt{3x^2+2} \\ \sqrt{3x^2+2}=-\dfrac{x^2-14}{3x} \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x=0 \\ y=\pm\sqrt{2} \end{cases} \\ \begin{cases} y=\sqrt{3x^2+2} \\ \dfrac{x^2-14}{3x}\ge 0 \\ 3x^2+2=\dfrac{\left(x^2-14\right)^2}{9x^2} \end{cases} \\ \begin{cases} y=-\sqrt{3x^2+2} \\ \dfrac{x^2-14}{3x}\le 0 \\ 3x^2+2=\dfrac{\left(x^2-14\right)^2}{9x^2} \end{cases} \end{array}\right. \qquad (1)$$

Решим уравнение $3x^2+2=\dfrac{\left(x^2-14\right)^2}{9x^2}$ при $x\ne 0$. Оно равносильно биквадратному уравнению $13x^4+23x^2-88=0$, решения которого есть $x=\sqrt{2}$ и $x=-x=\sqrt{2}$.

Подставляя полученные значения в ограничения совокупности (1), получаем ответ.

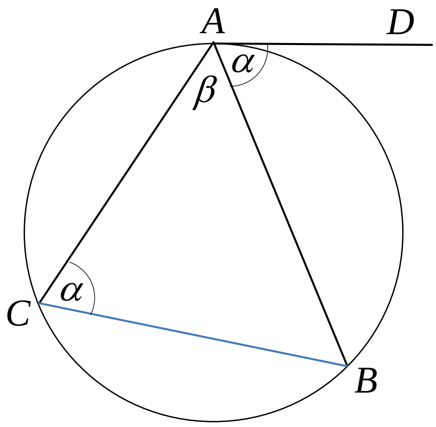
Ответ: $\left(0;\pm\sqrt{2}\right)$, $\left(\pm\sqrt{2};\mp 2\sqrt{2}\right)$.

6. **(5 баллов)** Из точки A, лежащей на окружности, проведены хорды AB, AC и касательная AD. Угол между хордами равен $\dfrac{\pi}{6}$, а угол между хордой AC и касательной AD, который не содержит хорды AB, равен $\dfrac{5\pi}{12}$. Вычислите целую часть радиуса окружности, если площадь треугольника ABC равна 32.

Решение:

Пусть $\angle DAC=\alpha$, $\angle BAC=\beta$, а радиус окружности равен R.

Известно, что $\angle ACB=\angle DAC=\alpha$.



По теореме синусов $\dfrac{|AB|}{\sin\alpha} = \dfrac{|BC|}{\sin\beta} = 2R$. Следовательно, $|AB| = 2R\sin\alpha$, а $|BC| = 2R\sin\beta$.

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}|AB|\cdot|BC|\cdot\sin(\angle ABC).$$

Следовательно,

$$S_{\triangle ABC} = 2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta).$$

$$R = \sqrt{\frac{S_{\triangle ABC}}{2\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}} \qquad (2).$$

Для вычисления величины радиуса требуется знать значения $\sin\alpha$ и $\sin(\alpha+\beta)$. Вычислим эти величины в условиях задачи. Для этого посчитаем $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$.

$$\sin\alpha = \sin\frac{5\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\right) = \cos\frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}.$$

$$\cos\alpha = \cos\frac{5\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\right) = \sin\frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}} = \frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}.$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{5\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{12}\right) = \cos\frac{\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}.$$

Подставив полученные значения в (2), нетрудно получить, что $R = \dfrac{16}{1+\sqrt{3}}$.

Остается вычислить ответ.

Ответ: 5.