Решения 9 класс

1. (**2 балла**) Про натуральное число x сделано пять утверждений:

$$3x > 91$$

$$x < 120$$

$$4x > 37$$

$$2x \geq 21$$

$$x > 7$$

Известно, что только три из них верны, а два неверны. Найти x.

Решение. Преобразуем исходную систему неравенств

$$x > \frac{91}{3}$$

$$x \geq \frac{21}{2}$$

$$x > \frac{37}{4}$$

$$x > 7$$

$$x < 120$$

Первое неравенство не выполняется, поскольку в противном случае выполняются сразу четыре неравенства. Значит, $x \leq \frac{91}{3}$, и пятое неравенство выполнено.

Второе неравенство также не выполняется, поскольку в противном случае выполнены четыре неравенства: второе, третье, четвертое и пятое. Значит, $x < \frac{21}{2}$.

Теперь сразу видно, что искомое число $x = 10$.

Ответ: $x = 10$

2. (2 балла) При каких целых p и q значение многочлена $f(x)=x^2+px+q$ делится на 2 при любом целом x ?

Решение: По условию
$f(x+1)-f(x)=2x+1+p \vdots 2 \ \ \forall x \in Z \Leftrightarrow (p+1) \vdots 2 \Leftrightarrow p -$ нечетно.
Поэтому числа x^2 и px или оба четные, или оба нечетные, а значит $x^2+px \vdots 2$. Следовательно, q -- четное.

Ответ: p – нечетно, q – четно.

3. (**3 балла**) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + xy + y = 2 + 3\sqrt{2} \\ x^2 + y^2 = 6. \end{cases}$$

Решение: Замена

$$u = x + y, v = x \cdot y. \qquad (1)$$

Исходная система примет вид

$$\begin{cases} u + v = 2 + 3\sqrt{2} & (2) \\ u^2 - 2v = 6. & (3) \end{cases}$$

Умножив уравнение (2) на 2 и сложив с (3), получим $u^2 + 2u = 10 + 6\sqrt{2} \Leftrightarrow (u+1)^2 = 11 + 6\sqrt{2} = \left(3 + \sqrt{2}\right)^2$. Отсюда $u_1 = 2 + \sqrt{2}, u_2 = -4 - \sqrt{2}$, а из (2) находим им соответствующие $v_1 = 2\sqrt{2}, v_2 = 6 + 4\sqrt{2}$. С учетом (1) получаем две системы

1) $\begin{cases} x + y = u_1 \\ x \cdot y = v_1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 2, y_1 = \sqrt{2} \\ x_2 = \sqrt{2}, y_2 = 2. \end{array} \right.$

2) $\begin{cases} x + y = u_2 \\ x \cdot y = v_2 \end{cases} \Rightarrow x, y -$ корни уравнения $t^2 - u_2 t + v_2 = 0$, которое действительных корней не имеет, т.к. $D < 0$.

Ответ: $\left[\begin{array}{l} x_1 = 2, y_1 = \sqrt{2} \\ x_2 = \sqrt{2}, y_2 = 2. \end{array} \right.$

4. **(4 балла)** Население города увеличивалось в течение x лет на 50% ежегодно, потом в течение y лет оно уменьшалось на $\frac{388}{9}\%$ ежегодно, а затем оно еще уменьшалось на $\frac{50}{3}\%$ в год в течение z лет. В результате население удвоилось. Известно, что x, y, z – целые числа. Найдите их.

Решение: Пусть $a = 50, b = -\frac{388}{9}$, $c = -\frac{50}{3}$. По условию

$$\left(1+\frac{a}{100}\right)^x \cdot \left(1+\frac{b}{100}\right)^y \cdot \left(1+\frac{c}{100}\right)^z = 2. \qquad (1)$$

Сложим дроби в скобках и разложим числитель и знаменатель на простые множители:

$$1+\frac{a}{100} = 2^{-1}\cdot 3, \quad 1+\frac{b}{100} = 2^7 \cdot 3^{-2}\cdot 5^{-2}, \quad 1+\frac{c}{100} = 2^{-1}\cdot 3^{-1}\cdot 5$$

Приравнивая показатели степеней в разложении на простые множители левой и правой части уравнения (1), получаем систему линейных уравнений на x, y, z:

$$\begin{cases} -x+7y-z=1 \\ x-2y-z=0 \\ -2y+z=0. \end{cases}$$

Решив систему, получим

Ответ: $x = 4,\ y = 1,\ z = 2.$

5. (**4 балла**) Числа a,b,c удовлетворяют условиям $2011(\quad + \quad + \quad) = 1$ и $ab+ac+bc = 2011\cdot abc$. Найти $a^{2011} \cdot b^{2011} + c^{2011}$.

Решение. Из условия вытекает уравнение

$$\frac{1}{a+b+c} = \frac{ab \quad ac \quad bc}{a} = 2011$$

Значит, $abc = \quad a+b+c) \quad ab+ac+bc)$. Последнее выражение можно разложить на множители $\quad) \quad) \quad) \quad 0$

a,b,c есть два числа, дающих в сумме 0. Пусть $a \quad -b$. Тогда

$$a^{2011}+b^{2011}+c^{2011} = \frac{1}{2011^{2011}}.$$

Ответ: $\frac{1}{2011^{2011}}$

6. (**5 баллов**) Найдите все пары целых чисел (x, y), для которых справедливо равенство

$$x(x+1)(x+7)(x+8)=y^2.$$

Решение:

$$x(x+1)(x+7)(x+8)=y^2 \quad \Leftrightarrow \qquad (1)$$

$$\left(x^2+8x\right)\left(x^2+8x+7\right)=y^2. \qquad (2)$$

Положим $z=x^2+8x+\dfrac{7}{2} \Rightarrow 2z=2x^2+16x+7\in Z$. Из (2) находим

$$\left(z-\frac{7}{2}\right)\left(z+\frac{7}{2}\right)=y^2 \Leftrightarrow z^2-\frac{49}{4}=y^2,$$

что эквивалентно $\left(2z-2y\right)\left(2z+2y\right)=49$. Поскольку

$\left(2z\pm 2y\right)\in Z$, а

$49=1\cdot 49=7\cdot 7=49\cdot 1=-1\cdot(-49)=(-7)\cdot(-7)=(-49)\cdot(-1)$, то остаются возможными только следующие шесть вариантов:

1) $\begin{cases} 2z-2y=1 \\ 2z+2y=49 \end{cases} \Rightarrow y=12,\ 2z=25 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-9. \end{array}\right.$

2) $\begin{cases} 2z-2y=7 \\ 2z+2y=7 \end{cases} \Rightarrow y=0,\ 2z=7 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-8. \end{array}\right.$

3) $\begin{cases} 2z-2y=49 \\ 2z+2y=1 \end{cases} \Rightarrow y=-12,\ 2z=25 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-9. \end{array}\right.$

4) $\begin{cases} 2z-2y=-1 \\ 2z+2y=-49 \end{cases} \Rightarrow y=-12,\ 2z=-25 \Rightarrow x=-4.$

5) $\begin{cases} 2z-2y=-7 \\ 2z+2y=-7 \end{cases} \Rightarrow y=0,\ 2z=-7 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-7. \end{array}\right.$

6) $\begin{cases} 2z-2y=-49 \\ 2z+2y=-1 \end{cases} \Rightarrow y=12,\ 2z=-25 \Rightarrow x=-4.$

Ответ:

$(1;12), (1;-12), (-9;12), (-9;-12), (0;0), (-8;0), (-4;-12),$

$(-4;12), (-1;0), (-7;0)$

(10 пар).